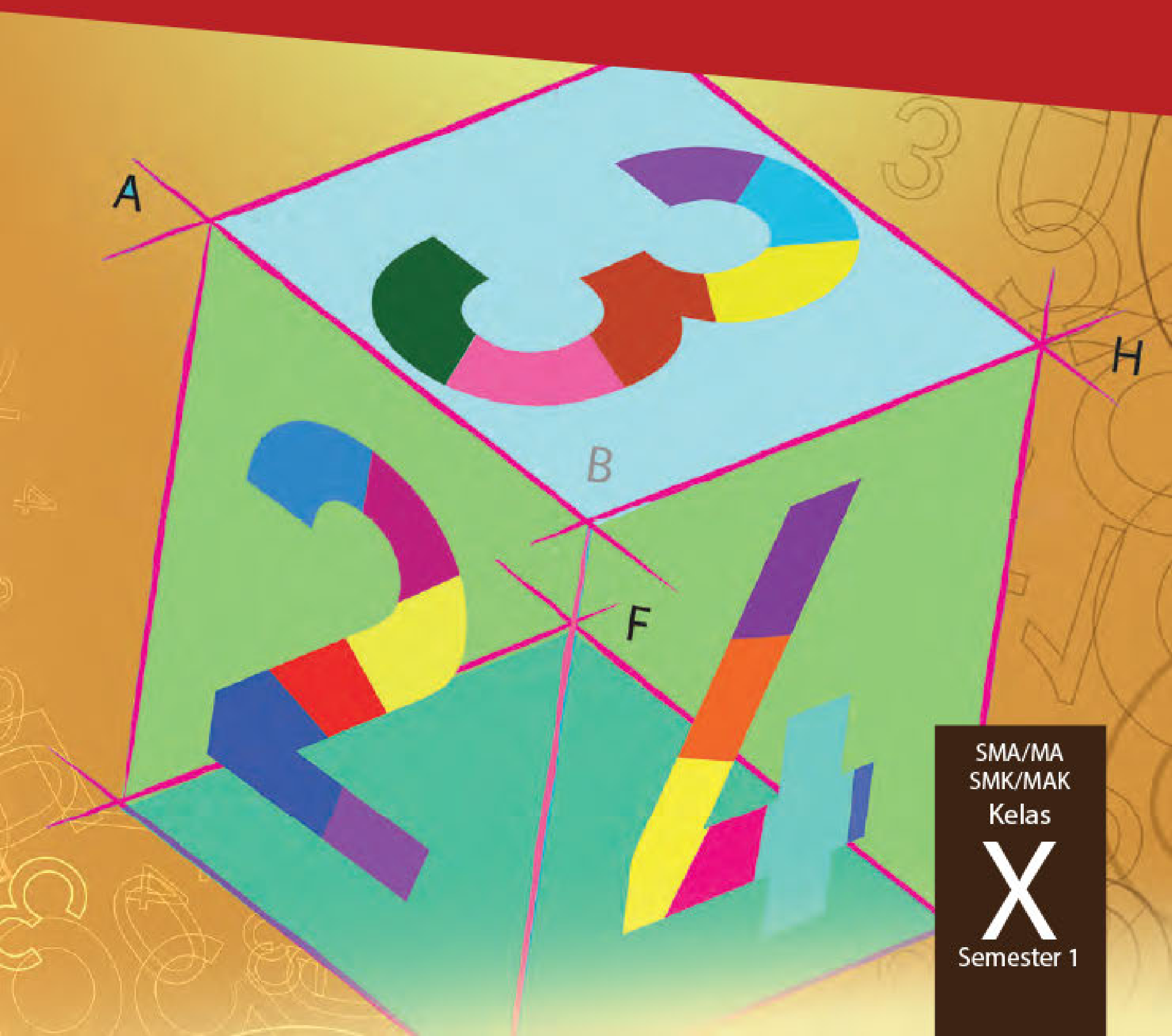
EDISI REVISI 2014

MATEMATIKA



SMA/MA
SMK/MAK
Kelas
X
Semester 1

Disklaimer: *Buku ini merupakan buku siswa yang dipersiapkan Pemerintah dalam rangka implementasi Kurikulum 2013. Buku siswa ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, dan dipergunakan dalam tahap awal penerapan Kurikulum 2013. Buku ini merupakan "dokumen hidup" yang senantiasa diperbaiki, diperbaharui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.*

Katalog Dalam Terbitan (KDT)

Indonesia. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
Matematika/Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.-- Edisi Revisi.
Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2014.
vi, 222 hlm. : ilus. ; 25 cm.

Untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X Semester 1
ISBN 978-602-282-491-6 (jilid lengkap)
ISBN 978-602-282-492-3 (jilid 1a)

1. Matematika — Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

510

Kontributor Naskah : Bornok Sinaga, Pardomuan N.J.M. Sinambela, Andri Kristianto Sitanggang, Tri Andri Hutapea, Lasker Pangarapan Sinaga, Sudianto Manullang, Mangara Simanjorang, dan Yuza Terzalgi Bayuzetra.
Penelaah : Agung Lukito dan Sisworo.
Penyelia Penerbitan : Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud.

Cetakan Ke-1, 2013
Cetakan Ke-2, 2014 (Edisi Revisi)
Disusun dengan huruf Times New Roman, 11 pt.

Kata Pengantar

Matematika adalah bahasa universal untuk menyajikan gagasan atau pengetahuan secara formal dan presisi sehingga tidak memungkinkan terjadinya multi tafsir. Penyampaiannya adalah dengan membawa gagasan dan pengetahuan konkret ke bentuk abstrak melalui pendefinisian variabel dan parameter sesuai dengan yang ingin disajikan. Penyajian dalam bentuk abstrak melalui matematika akan mempermudah analisis dan evaluasi selanjutnya.

Permasalahan terkait gagasan dan pengetahuan yang disampaikan secara matematis akan dapat diselesaikan dengan prosedur formal matematika yang langkahnya sangat presisi dan tidak terbantahkan. Karenanya matematika berperan sebagai alat komunikasi formal paling efisien. Perlu kemampuan berpikir kritis-kreatif untuk menggunakan matematika seperti uraian diatas: menentukan variabel dan parameter, mencari keterkaitan antar variabel dan dengan parameter, membuat dan membuktikan rumusan matematika suatu gagasan, membuktikan kesetaraan antar beberapa rumusan matematika, menyelesaikan model abstrak yang terbentuk, dan mengkonkretkan nilai abstrak yang diperoleh.

Buku Matematika Kelas X untuk Pendidikan Menengah ini disusun dengan tujuan memberi pengalaman konkret-abstrak kepada peserta didik seperti uraian diatas. Pembelajaran matematika melalui buku ini akan membentuk kemampuan peserta didik dalam menyajikan gagasan dan pengetahuan konkret secara abstrak, menyelesaikan permasalahan abstrak yang terkait, dan berlatih berfikir rasional, kritis dan kreatif.

Sebagai bagian dari Kurikulum 2013 yang menekankan pentingnya keseimbangan kompetensi sikap, pengetahuan dan keterampilan, kemampuan matematika yang dituntut dibentuk melalui pembelajaran berkelanjutan: dimulai dengan meningkatkan pengetahuan tentang metode-metode matematika, dilanjutkan dengan keterampilan menyajikan suatu permasalahan secara matematis dan menyelesaikannya, dan bermuara pada pembentukan sikap jujur, kritis, kreatif, teliti, dan taat aturan.

Buku ini menjabarkan usaha minimal yang harus dilakukan peserta didik untuk mencapai kompetensi yang diharapkan. Sesuai dengan pendekatan yang dipergunakan dalam Kurikulum 2013, peserta didik diberanikan untuk mencari dari sumber belajar lain yang tersedia dan terbentang luas di sekitarnya. Peran guru sangat penting untuk meningkatkan dan menyesuaikan daya serap peserta didik dengan ketersedian kegiatan pada buku ini. Guru dapat memperkayanya dengan kreasi dalam bentuk kegiatan-kegiatan lain yang sesuai dan relevan yang bersumber dari lingkungan sosial dan alam.

Implementasi terbatas pada tahun ajaran 2013/2014 telah mendapat tanggapan yang sangat positif dan masukan yang sangat berharga. Pengalaman tersebut dipergunakan semaksimal mungkin dalam menyiapkan buku untuk implementasi menyeluruh pada tahun ajaran 2014/2015 dan seterusnya. Buku ini merupakan edisi kedua sebagai penyempurnaan dari edisi pertama. Buku ini sangat terbuka dan terus dilakukan perbaikan dan penyempurnaan. Untuk itu, kami mengundang para pembaca memberikan kritik, saran dan masukan untuk perbaikan dan penyempurnaan pada edisi berikutnya. Atas kontribusi tersebut, kami ucapkan terima kasih. Mudah-mudahan kita dapat memberikan yang terbaik bagi kemajuan dunia pendidikan dalam rangka mempersiapkan generasi seratus tahun Indonesia Merdeka (2045).

Jakarta, Januari 2014

Menteri Pendidikan dan Kebudayaan

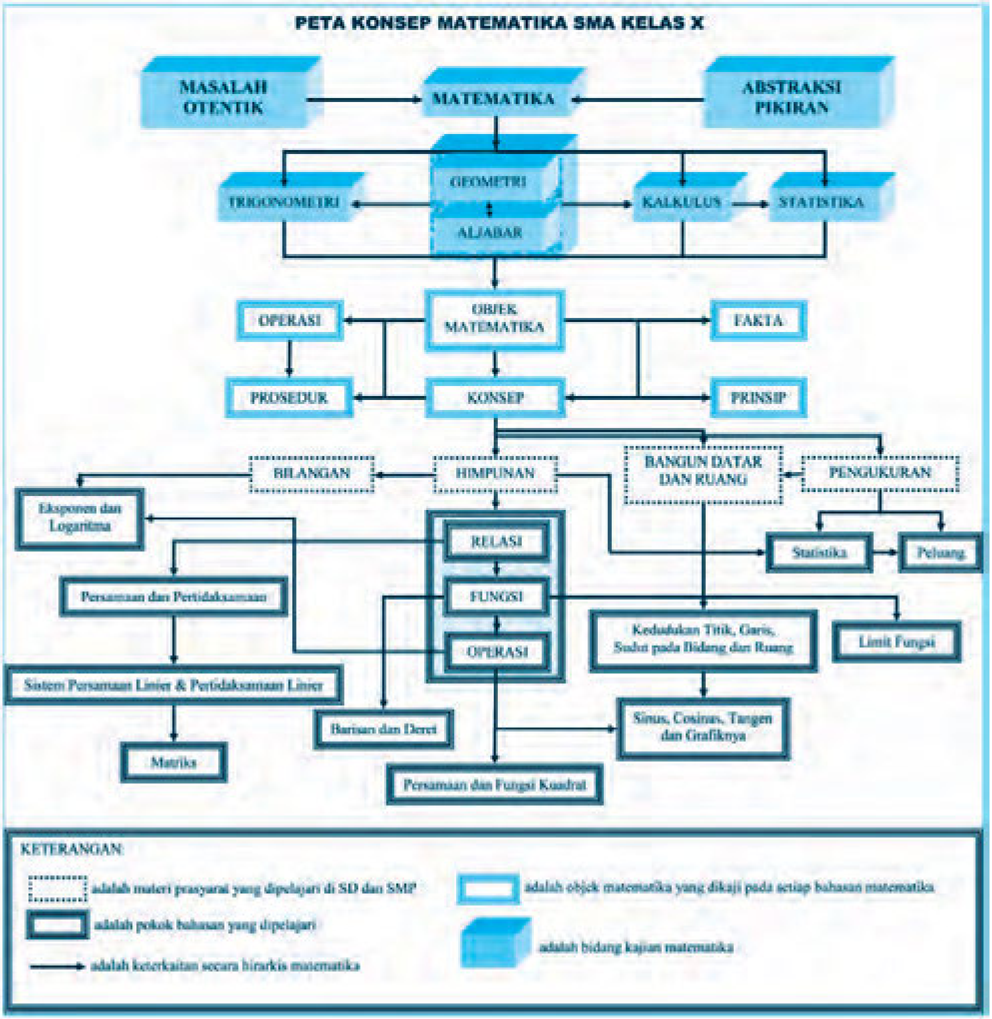
Mohammad Nuh

DAFTAR ISI

“Pendidikan adalah senjata paling mematikan di dunia,
karena dengan itu Anda dapat mengubah dunia”
– Nelson Mandela

Kami ucapkan :
Selamat belajar & mengajar
Jangan menyerah, suksesmu adalah sukses kita semua




PETA KONSEP MATEMATIKA SMA KELAS X
MASALAH OTENTIK
MATEMATIKA
ABSTRAKSI PIKIRAN
GEOMETRI
TRIGONOMETRI
KALKULUS
STATISTIKA
ALJABAR
OPERASI
OBJEK MATEMATIKA
FAKTA
PROSEDUR
KONSEP
PRINSIP
BILANGAN
HIMPUNAN
BANGUN DATAR DAN RUANG
PENGUKURAN
Eksponen dan Logaritma
RELASI
Statistika
Peluang
Persamaan dan Pertidaksamaan
FUNGSI
Kedudukan Titik, Garis, Sudut pada Bidang dan Ruang
Limit Fungsi
OPERASI
Sistem Persamaan Linier & Pertidaksamaan Linier
Barisan dan Deret
Sinus, Cosinus, Tangen dan Grafiknya
Matriks
Persamaan dan Fungsi Kuadrat
KETERANGAN:
adalah materi prasyarat yang dipelajari di SD dan SMP
adalah pokok bahasan yang dipelajari
adalah keterkaitan secara hirarkis matematika
adalah objek matematika yang dikaji pada setiap bahasan matematika
adalah bidang kajian matematika

Bab 1

Eksponen dan Logaritma

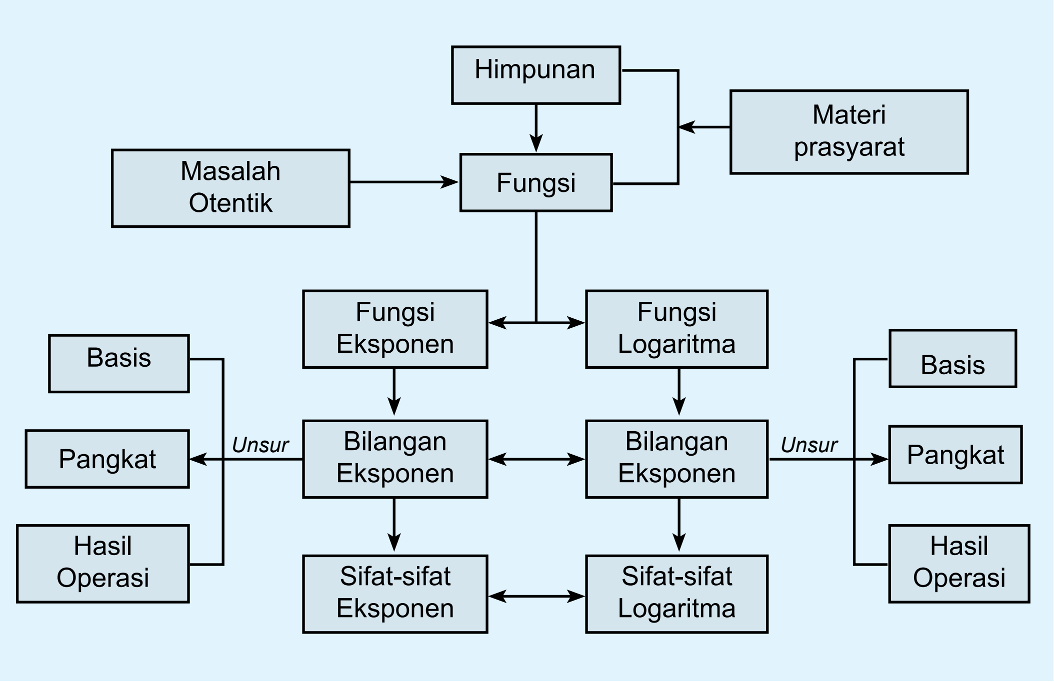
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran eksponen dan logaritma, siswa mampu: 1. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah. 2. Menunjukkan sikap bertanggung-jawab, rasa ingin tahu, jujur dan perilaku peduli lingkungan. 3. Memilih dan menerapkan aturan eksponen dan logaritma sesuai dengan karakteristik permasalahan yang akan diselesaikan dan memeriksa kebenaran langkah-langkahnya. 4. Menyelesaikan masalah nyata menggunakan operasi aljabar berupa eksponen dan logaritma serta menyelesaikannya menggunakan sifat–sifat dan aturan yang telah terbukti kebenarannya.	Melalui pembelajaran materi eksponen dan logaritma, siswa memperoleh pengalaman belajar: • mengkomunikasikan karakteristik masalah otentik yang pemecahannya terkait eksponen dan logaritma. • merancang model matematika dari sebuah permasalahan otentik yang berkaitan dengan eksponen dan logaritma. • menyelesaikan model matematika untuk memperoleh solusi permasalahan yang diberikan. • menafsirkan hasil pemecahan masalah. • menuliskan dengan kata-katanya sendiri konsep persamaan kuadrat.berdasarkan ciri-cirinya dituliskan sebelumnya. • membuktikan berbagai sifat eksponen dan logaritma. • menerapkan berbagai sifat eksponen dan logaritma dalam pemecahan masalah. • berkolaborasi memecahkan masalah. • berlatih berpikir kritis dan kreatif

Istilah Penting

- *Bilangan Pokok (Basis)*
- *Perpangkatan*
- *Eksponen*
- *Logaritma*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

Beberapa permasalahan dalam kehidupan sehari – hari dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep dan aturan matematika. Sebagai contoh, konsep eksponen dan logaritma berperan penting dalam menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan aritmatika sosial, peluruhan zat kimia, perkembangan bakteri dan lain – lain. Untuk itu perhatikan dan selesaikan dengan cermat permasalahan – permasalahan yang diberikan pada bab ini. Di dalam proses pemecahan masalah-masalah yang diberikan, kamu diminta untuk mencermati objek-objek yang dilibatkan dalam permasalahan yang diberikan tersebut.

1. Menemukan Konsep Eksponen

Pada subbab ini, konsep eksponen ditemukan dengan mengamati beberapa masalah nyata berikut dan mencermati beberapa alternatif penyelesaiannya. Tentu saja, kamu diminta untuk melakukan pemodelan matematika yang melibatkan eksponen. Dari beberapa model matematika yang diperoleh dari langkah-langkah penyelesaian masalah, kamu secara individu menuliskan ciri-ciri eksponen dan mendiskusikan hasilnya dengan temanmu. Berdasarkan ciri-ciri tersebut, kamu menuliskan konsep eksponen dengan pemahamanmu sendiri.

Masalah-1.1

Seorang peneliti di sebuah lembaga penelitian sedang mengamati pertumbuhan suatu bakteri di sebuah laboratorium mikrobiologi. Pada kultur bakteri tertentu, satu bakteri membelah menjadi r bakteri setiap jam. Hasil pengamatan menunjukkan bahwa jumlah bakteri pada akhir 3 jam adalah 10.000 bakteri dan setelah 2 jam kemudian, jumlah bakteri tersebut menjadi 40.000 bakteri. Peneliti tersebut ingin mengetahui banyak bakteri sebagai hasil pembelahan dan mencari tahu banyak bakteri pada akhir 8 jam.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

Satu bakteri membelah menjadi r bakteri untuk setiap jam.

Jumlah bakteri pada akhir 3 jam adalah 10.000 bakteri dan setelah 2 jam kemudian, jumlahnya menjadi 40.000 bakteri.

Ditanya:

a. Berapa banyak bakteri sebagai hasil pembelahan.

b. Berapa jumlah bakteri pada akhir 8 jam.

Sebagai langkah awal buat tabel laju pertumbuhan bakteri terhadap waktu setiap jam. Misalkan jumlah bakteri pada awalnya ($t = 0$) adalah x_0. Isilah tabel berikut!

Pada akhir t jam	0	1	....	....	....	....
Jumlah bakteri (x_t)	x_0	rx_0	....	....	....	....

Dari hasil pengamatan data pada tabel di atas, kita dapat membuat hubungan pertumbuhan jumlah bakteri (x_t) tersebut terhadap perubahan waktu (t).

$x_t = \underbrace{r \times r \times r \times ... \times r}_{t \text{ faktor}} \times x_0$ atau secara ringkas ditulis

$x_t = r^t x_0$.. (1)

dengan t menyatakan banyak jam, x_0 adalah jumlah bakteri saat $t = 0$ dan r adalah banyak bakteri setelah pembelahan terjadi pada setiap jam.

Pada Masalah-1.1 diketahui bahwa pada akhir 3 jam terdapat 10.000 bakteri dan setelah 5 jam terdapat 40.000 bakteri. Kita substitusikan $t = 3$ dan $t = 5$ ke formula (1) di atas, maka diperoleh $x_3 = r^3x_0 = 10.000$ dan $x_5 = r^5x_0 = 40.000$

$$\frac{x_5}{x_3} = \frac{40.000}{10.000}$$

$$\frac{r^5 x_0}{r^3 x_0} = 4$$

$$r^2 = 4$$

$$r = 2$$

Jadi, peneliti tersebut menemukan bahwa bakteri membelah menjadi 2 bakteri setiap 1 jam

Untuk mendapatkan banyak bakteri pada awalnya atau $t = 0$, substitusi $r = 2$ ke persamaan $r^3x_0 = 10.000$ sehingga $8x_0 = 10.000$. Dengan demikian $x_0 = 1.250$.

Subtitusikan $x_0 = 1.250$ ke persamaan (1), pola pertumbuhan bakteri tersebut dinyatakan

$$x_t = 1250.2^t$$

$$x_8 = (2^8)(1250)$$

$$= 320.000$$

> Dalam Masalah-1.1, ditemukan $r^2 = 4$, dan kemudian $r = 2$. Apakah $r = -2$ tidak berlaku? Berikan alasanmu!

Jadi, pada akhir 8 jam, peneliti mendapatkan jumlah bakteri sudah mencapai 320.000 bakteri.

Masalah-1.2

Diberikan selembar kertas berbentuk persegi panjang. Lipatlah kertas tersebut di tengah-tengah sehingga garis lipatan membagi bidang kertas menjadi dua bidang yang sama. Lipatlah lagi dengan cara yang sama kertas hasil lipatan tadi. Lakukan terus-menerus pelipatan ini. Temukanlah pola yang menyatakan hubungan banyak lipatan dengan banyak bidang kertas yang terbentuk.

Alternatif Penyelesaian

Sebagai langkah awal buat tabel keterkaitan antara banyak garis lipatan dengan banyak bidang kertas yang terbentuk.

Banyak Lipatan	Banyak Bidang Kertas	Pola Perkalian
1	2	2 = 2
2	4	$4 = 2 \times 2$
3	8	$8 = 2 \times 2 \times 2$
4	...	...
...	...	...
n	k	...

Berdasarkan tabel di atas, misalkan k adalah banyak bidang kertas yang terbentuk sebagai hasil lipatan bidang kertas menjadi dua bagian yang sama, n adalah banyak lipatan.

k dapat dinyatakan dalam n, yaitu

$k(n) = 2^n$ .... (2)

Coba kamu uji kebenaran persamaan $k(n) = 2^n$ dengan mensubtitusikan nilai n ke persamaan tersebut.

Berdasarkan persamaan (1) dan (2), diperoleh
Dari persamaan (1) $x_t = r^t x_0$, r adalah bilangan pokok dan t adalah eksponen dari r.
Dari persamaan (2) $k(n) = 2^n$, 2 adalah bilangan pokok dan n adalah eksponen dari 2.
Untuk menyederhanakan penulisan hasil kali bilangan yang sama, kita dapat menggunakan *notasi pangkat*. Bilangan berpangkat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.1

Misalkan a bilangan real dan n bilangan bulat positif. Notasi a^n menyatakan hasil kali bilangan a sebanyak n faktor, dapat ditulis $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ faktor}}$ dengan a sebagai basis bilangan berpangkat dan n sebagai pangkat.

Catatan:

1. Pada Definisi-1.1 di atas, kita sepakati, a^1 cukup ditulis a.
2. Hati-hati dengan bilangan pokok $a = 0$, tidak semua a^0 dengan a bilangan real menyatakan 1. Coba tanyakan pada gurumu, mengapa demikian?
3. Jika n adalah sebuah variabel sebagai eksponen dari a, maka perlu dicermati semesta variabel itu. Sebab $a^n = a \times a \times \ldots \times a$ sebanyak n faktor, ini hanya berlaku ketika semesta $n \in N$.

Perhatikan Masalah-1.3 berikut!

Masalah-1.3

Suatu zat yang disuntikkan ke dalam tubuh manusia akan dikeluarkan dari darah melalui ginjal. Setiap 1 jam separuh zat itu dikeluarkan oleh ginjal. Bila 100 mg zat itu disuntikkan ke tubuh manusia, berapa miligram zat itu tersisa dalam darah setelah:

1) 1 jam?
2) 2 jam?
3) 3 jam?
4) Buatlah model matematika pengurangan zat tersebut dari tubuh melalui ginjal!
5) Gambar pasangan titik (waktu, jumlah zat) pada koordinat kartesius untuk 8 jam pengamatan.

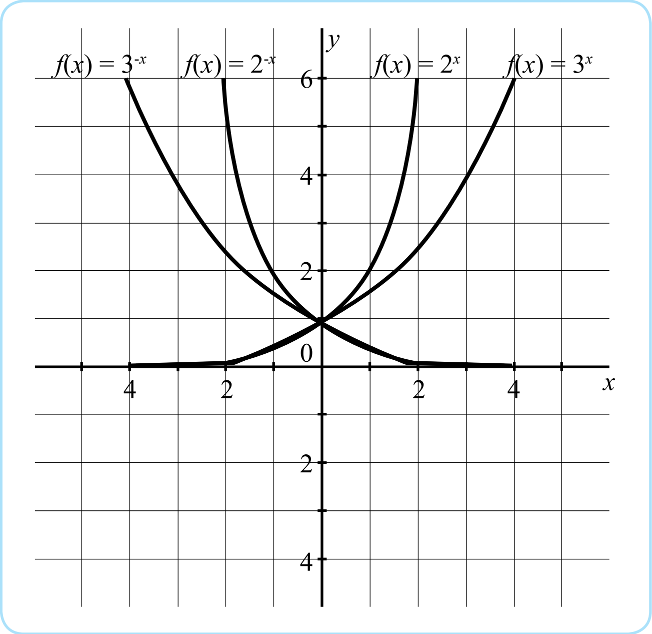
Alternatif Penyelesaian

Langkah awal isilah tabel berikut:

Waktu (*t dalam jam*)	1	2	3	4	5	6	7	8
Jumlah zat $z(t)$ dalam mg	50	25	12,5	...	...	...	...	...

Isilah secara lengkap data pada tabel dan coba gambarkan pasangan titik-titik tersebut pada sistem koordinat kartesius (coba sendiri)!

Selanjutnya perhatikan grafik fungsi (Gambar-1.2) di bawah ini. Isilah nilai-nilai fungsi tersebut dan sajikan nilai-nilai tersebut pada tabel yang diberikan.



Gambar-1.2: Grafik Fungsi Eksponensial

	x							
	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x) = 2^x$								
$f(x) = 2^{-x}$								
$f(x) = 2^x$								
$f(x) = 3^x$								
$f(x) = 3^{-x}$								

Latihan 1.1

Amati grafik (Gambar-1.2) di atas. Tuliskan sedikitnya 5 (lima) sifat grafik fungsi tersebut dan disajikan hasilnya di depan kelas. Dalam paparan jelaskan mengapa kita perlu mengetahui sifat-sifat tersebut.

2. Pangkat Bulat Negatif

Definisi 1.2

Untuk a bilangan real dan $a \neq 0$, m bilangan bulat positif, didefinisikan

$$a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$$

Definisi di atas dijelaskan sebagai berikut:

$$a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m = \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)\times\left(\frac{1}{a}\right)\times\left(\frac{1}{a}\right)\times\ldots\times\left(\frac{1}{a}\right)}_{\text{sebanyak } m \text{ faktor}}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{m \text{ faktor}}}$$

$$= \frac{1}{a^m}$$

Contoh 1.1

Jika $x = -2$ dan $y = 2$, tentukan nilai $x^{-3}(y^4)$.

Alternatif Penyelesaian

$$x^{-3}\left(y^4\right) = \frac{y^4}{x^3} = \frac{2^4}{(-2)^3} = \frac{16}{-8} = -2$$

3. Pangkat Nol

Definisi 1.3

Untuk a bilangan real dan $a \neq 0$, maka $a^0 = 1$.

Untuk lebih memahami definisi di atas, perhatikan pola hasil pemangkatan bilangan-bilangan berikut.

$2^3 = 8$	$3^3 = 27$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$
$2^1 = 2$	$3^1 = 3$
$2^0 = 1$	$3^0 = 1$

Perhatikan hasil pemangkatan 2 dengan 0, dan hasil pemangkatan 3 dengan 0, hasil perpangkatannya adalah 1.

4. Sifat-sifat Pangkat Bulat Positif

Coba cermati bukti sifat-sifat bilangan berpangkat bulat positif menggunakan definisi bilangan berpangkat yang telah kamu pelajari sebelumnya.

Sifat-1

Jika a bilangan real, m dan n bilangan bulat positif maka $a^m \times a^n = a^{m+n}$

Bukti:

$$a^m \times a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m\ faktor} \times \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n\ faktor}$$
$$= a^m \times a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times a}_{m+n}$$
$$= a^{m+n}$$

- Perhatikan $a^m = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m\ faktor}$.

  Diskusikan dalam kelompokmu, apakah benar perpangkatan adalah perkalian berulang?
- Bagaimana jika m dan n bukan bilangan bulat positif?

Sifat-2

Jika a bilangan real dan $a \neq 0$, m dan n bilangan bulat positif, maka $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Bukti:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}^{}\ \underbrace{}_{m\text{ faktor}}}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n\text{ faktor}}} \quad \text{(sesuai Definisi 1.1)}$$

- Pada persyaratan Sifat-2, mengapa $a \neq 0$ dipersyaratkan?
- Bagaimana jika $a = 0$? Apa dampaknya pada hasil pembagian $\frac{a^m}{a^n}$? Jika kamu tidak tahu bertanya ke guru!

Sifat-1 di atas hanya berkaitan dengan bilangan bulat positif m dan n. Ada 3 (tiga) kemungkinan, yaitu (*a*) $m > n$, (*b*) $m = n$, dan (*c*) $m < n$.

a) Kasus $m > n$

Jika m dan n bilangan bulat positif dan $m > n$ maka $m - n > 0$. Dengan demikian

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ faktor}}} = \frac{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ faktor}}}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ faktor}}} \times \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{(m-n) \text{ faktor}}$$

$$= \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{(m-n) \text{ faktor}}$$

$$= a^{m-n}$$

Jadi $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, dengan m, n bilangan bulat positif dan $m > n$

b) Kasus $m = n$

Jika $m = n$, maka $\dfrac{a^m}{a^n} = 1 = a^0 = a^{m-n}$.

Bukti:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m}, \text{ sebab } m = n$$

$$= \frac{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}}$$

$$= 1$$

$$= a^0$$

Latihan 1.2

Buktikan sendiri untuk kasus $m < n$. Jelaskan perbedaan hasilnya dengan kasus (a).

Sifat-3

Jika a bilangan real dan $a \neq 0$, m dan n bilangan bulat positif, maka $(a^m)^n = a^{mn}$

Bukti:

$$\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m \times a^m \times a^m \times \ldots \times a^m}_{n \text{ faktor}}$$

$$= \underbrace{\left(\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}\right)\left(\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}\right)\left(\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}\right)\ldots\left(\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}\right)}_{n \text{ faktor}}$$

$$= \left(\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \times n \text{ faktor}}\right)$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \times n} \text{ (terbukti)}$$

Diskusi

Diskusikan dengan temanmu, apakah syarat bahwa *m* dan *n* bilangan positif diperlukan untuk Sifat-3 dan Sifat-4. Bagaimana jika *m* dan *n* adalah negatif atau kedua-duanya bilangan negatif.

Contoh 1.2

(a) Buktikan bahwa jika $a \in R$, $a > 1$ dan $n > m$, maka $a^n > a^m$.

Bukti:

Karena $a > 1$ dan $n > m$ maka $n - m > 0$ dan $a^n > 0$, $a^m > 0$. Akibatnya, berlaku

$$\Leftrightarrow \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \text{ (Lihat Sifat-1 di atas)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^n}{a^m} > 1 \text{(Mengapa } \frac{a^n}{a^m} > 1\text{? Beri alasamu!)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^n}{a^m} \times a^m > 1 \times a^m \text{ (Karena } a^m > 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow a^m > a^n \text{ (terbukti)}$$

Lambang $\Leftrightarrow$ dibaca jika dan hanya jika.

(b) Perlukah syarat $a > 1$?

Misalkan kita ambil *a* bilangan real yang memenuhi $a < 1$ dan $n > m$. Apakah yang terjadi?

Pilih $a = -2$, dengan $n > m$, pilih $n = 3$ dan $m = 2$. Apakah yang terjadi?

$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

$(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$

Dengan demikian, $a^n = -8 < 4 = a^m$ atau $a^n < a^m$. Jadi, tidak benar bahwa $a^n > a^m$ bila $a < 1$ dan $n > m$. Jadi, syarat a adalah bilangan real, dengan $a > 1$ dan $n > m$ merupakan syarat cukup untuk membuktikan $a^n > a^m$.

Diskusi

Berdiskusilah dengan temanmu satu kelompok. Analisis pernyataan pada Contoh 1.2!

- Apa akibatnya bila syarat $a > 1$ tidak dipenuhi?
- Perlukah diperkuat dengan syarat $n > m > 0$? Jelaskan!
- Bolehkah syarat $a > 1$ di atas diganti $a \geq 1$? Jelaskan!
- Bagaimanakah bila $0 < a < 1$ dan $a < 0$?
- Buat aturan hubungan antara a^n dan a^m untuk bermacam-macam nilai a di atas!
- Buat laporan hasil diskusi kelompokmu.

Contoh 1.3

Terapkan berbagai sifat bilangan berpangkat untuk menentukan hasil operasi bilangan pada soal yang disajikan pada contoh. Ujilah kebenaran hasilnya!

1. $$2^2 \times 2^5 = \underbrace{2 \times 2}_{2\text{ faktor}} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{5\text{ faktor}}$$ dengan menggunakan Sifat-1
$$= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{7\text{ faktor}}$$
$$= 2^7$$
$$= 2^{2+5}$$

2. $$\frac{2^5}{2^5} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$$ dengan menggunakan Sifat-2 kasus b
$$= 2^0$$
$$= 2^{5-5}$$
$$= 2^{5-5}$$

3. $\left(2^3\right)^2 = \left(2^3\right)\times\left(2^3\right)$

$= \underbrace{(2\times2\times2)}_{3\ faktor}\times\underbrace{(2\times2\times2)}_{3\ faktor}$ dengan menggunakan Sifat-3

$= \underbrace{(2\times2\times2\times2\times2\times2)}_{6\ faktor}$

$= 2^{3+3}$

$= 2^6$

4. $(2\times3)^3 = (2\times3)\times(2\times3)\times(2\times3)$

$= \underbrace{2\times2\times2}_{3\,\text{faktor}}\times\underbrace{3\times3\times3}_{3\,\text{faktor}}$ dengan menggunakan Definisi 1.1

$= 2^3\times3^3$

5. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)$

$= \frac{\overbrace{2\times2\times2}^{3\,\text{faktor}}}{\underbrace{3\times3\times3}_{3\,\text{faktor}}}$ dengan menggunakan Definisi 1.1

$= \frac{2^3}{3^3}$

Contoh 1.4

Buktikan bahwa jika $a > 1$ dan $n > m$ dengan n dan m bilangan bulat negatif, maka $a^n > a^m$.

Bukti:

Karena $n > m$ dengan n dan m bilangan bulat negatif, maka $-n$ dan $-m$ adalah bilangan bulat positif dan $-m > -n$.

Karena $a > 1$ maka $\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = \frac{a^n}{a^m} > 1$ (Gunakan sifat $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$).

$\frac{a^n}{a^m} > 1 \Rightarrow a^n > a^m$ (terbukti)

Contoh 1.5

Berdasarkan sifat perkalian dengan bilangan 7, tentukan angka satuan dari 7^{1234} tanpa menghitung tuntas. Perhatikan angka satuan dari perpangkatan dari 7 berikut?

Perpangkatan 7	Nilai	Angka Satuan
7^1	7	7
7^2	49	9
7^3	343	3
7^4	2401	1
7^5	16807	7
7^6	117649	9
7^7	823543	3
7^8	5764801	1

Coba lanjutkan langkah berikutnya untuk menemukan angka satuan 7^{1234}. Cermati sifat satuan pada tabel di atas. Saat periode ke berapakah berulang? Selanjutnya manfaatkan sifat-sifat perpangkatan dan perkalian bilangan berpangkat.

5. Pangkat Pecahan

Definisi 1.4

Misalkan a bilangan real dan $a \neq 0$, m bilangan bulat positif, maka $a^{\frac{1}{m}} = p$ adalah bilangan real positif, sehingga $p^m = a$.

Selanjutnya kita akan analisis sifat perpangkatan bilangan real dengan pangkat pecahan.

Definisi 1.5

Misalkan a bilangan real dan $a \neq 0$, m, n bilangan bulat positif didefinisikan $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

Sifat-4

Misalkan a bilangan real dengan $a > 0$, $\frac{p}{n}$ dan $\frac{m}{n}$ adalah bilangan pecahan $n \neq 0$, maka $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = (a)^{\frac{m+p}{n}}$.

Bukti:

Berdasarkan Sifat-4, jika a bilangan real dan $a \neq 0$, m, n adalah bilangan bulat positif, maka $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$. Dengan demikian $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p$$

$$= \left(\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots \times a^{\frac{1}{n}}}_{m \text{ faktor}}\right)\left(\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots \times a^{\frac{1}{n}}}_{p \text{ faktor}}\right)$$

$$= \left(\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots \times a^{\frac{1}{n}}}_{m+p \text{ faktor}}\right) \qquad (\text{Sesuai Sifat } 1)$$

Berdasarkan Definisi 1.5 $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$, sehingga diperoleh

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m+p} = (a)^{\frac{m+p}{n}} \qquad \text{(terbukti)}$$

Sifat-5

Jika a adalah bilangan real dengan $a > 0$, $\frac{m}{n}$ dan $\frac{p}{q}$ bilangan pecahan dengan $q, n \neq 0$, maka $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$.

Bukti Sifat-5 coba sendiri.

Uji Kompetensi 1.1

1. Sederhanakanlah hasil operasi bilangan berpangkat berikut.
   a. $2^5 \times 2^9 \times 2^{12}$
   b. $2^5 \times 3^6 \times 4^6$
   c. $\dfrac{2^5 \times 3^5 \times 4^2}{12^2}$
   d. $\dfrac{(-5)^6 \times 25^2}{125}$
   e. $\dfrac{3^7 \times 7^3 \times 2}{(42)^3}$

2. Dengan menggunakan sifat bilangan berpangkat, sederhanakanlah bentuk berikut.
   a. $2x^3 \times 7x^4 \times (3x)^2$
   b. $\left(\dfrac{-2p}{q}\right) \times (-q)^4 \times \dfrac{2}{5}p^2$
   c. $y^5 \times (x \times y)^3 \left(\dfrac{1}{x^2 \times y}\right)$
   d. $(a \times b \times c)^4 \times \dfrac{3}{(b \times c)^3} \times \dfrac{b^3}{27a^5}$
   e. $\dfrac{-4a^3 \times 2b^5}{\left(\dfrac{8a}{b}\right)}$
   f. $\dfrac{1}{x^2 y} \times \dfrac{2x}{3y^2} \times \dfrac{5}{3x} \times (4y)^2$
   g. $(-a \times b)^3 \times \left(\dfrac{-b}{2a}\right)^4 \times \left(\dfrac{3a}{b}\right)^5$
   h. $\left(\dfrac{24a^3 \times b^8}{6a^5 \times b}\right) \times \left(\dfrac{4b^3 \times a}{2a^3}\right)^2$
   i. $\left(\dfrac{36(x \times 2y)^2}{3x \times y^2}\right) \div \left(\dfrac{12x(3y)^2}{9x^2 y}\right)^2$
   j. $\left(\dfrac{(-p)^3 \times (-q)^2 \times r^3}{-3(p^2 q)^3}\right) \div \left(\dfrac{2pqr^3}{-12(qr)^2}\right)$

3. Hitunglah hasil operasi bilangan berpangkat berikut.
   a. $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^4 \times \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}\right)^2$
   b. $(-5)^3 \times \left(\dfrac{1}{15}\right)^2 \times \left(\dfrac{10}{3}\right)^4 \times \left(\dfrac{9}{5}\right)^5$
   c. $\dfrac{3x^2 \times y^3}{24x} \times (2y)^2$; untuk $x = 2$ dan $y = 3$
   d. $\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}x\right)^2 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)(-y)^3}{xy^2}$ untuk $x = \dfrac{1}{2}$ dan $y = \dfrac{1}{3}$
   e. $\dfrac{3p^2 \times (-3)^4}{(-2p)^2 \times (-3q)^2} \times 4\left(\dfrac{q}{p}\right)^2$; untuk $p = 4$ dan $q = 6$
   f. $\dfrac{\left(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{-3}{2}}\right)\left(x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{-3}{2}}\right)x^{-1}y}{\left(x^2 + y^{-1} + y^{-2}\right)}$ untuk $x = \dfrac{1}{2}$ dan $y = \dfrac{1}{2}$

4. Hitunglah

$$\frac{1^{-4}+2^{-4}+3^{-4}+4^{-4}+\ldots}{1^{-4}+3^{-4}+5^{-4}+7^{-4}+\ldots}$$

5. Sederhanakanlah $\dfrac{a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{2}{3}}b}$.

6. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan berikut
   a. $2^x = 8$
   b. $4^x = 0{,}125$
   c. $\left(\frac{2}{5}\right)^x = 1$

7. Tentukan hasil dari

$$\frac{\left(2^{n+2}\right)^2-2^2\times 2^{2n}}{2^n\times 2^{n+2}}$$

8. Misalkan kamu diminta menghitung 7^{64}. Berapa banyak perkalian yang kamu lakukan untuk mendapatkan nilai akhirnya? Bandingkan jawabanmu dengan temanmu. Pemenang di antara kalian adalah yang dapat mencari hasilnya dengan melakukan perkalian sesedikit mungkin. Coba tuliskan prosedur mengalikan yang paling sedikit perkaliannya untuk menghitung 7^{64}. Apakah prosedur tersebut dapat dipergunakan untuk pangkat positif berapapun?

9. Berdasarkan sifat bilangan 7, tentukan angka satuan dari $7^{1234} + 7^{2341} + 7^{3412} + 7^{4123}$ tanpa menghitung tuntas!

10. Tentukan angka satuan dari $\left(\left(6\right)^{26}\right)^{62}$ berdasarkan sifat bilangan 6, tanpa menghitung tuntas. Selanjutnya lakukan hal tersebut berdasarkan sifat bilangan 2, 3, 4, 5, 8, 9.

11. Tunjukkan bahwa $1^{2001} + 2^{2001} + 3^{2001} + \ldots + 2001^{2001}$ adalah kelipatan 13.

12. Bagaimana cara termudah untuk mencari $\dfrac{3^{2008}\left(10^{2013}+5^{2012}\times 2^{2011}\right)}{5^{2012}\left(6^{2010}+3^{2009}\times 2^{2008}\right)}$.

Projek

Bilangan yang terlalu besar atau terlalu kecil sering dituliskan dalam notasi eksponen yang dituliskan sebagai a *E* b yang nilainya adalah $a \times 10^b$. Sehingga 0,000052 ditulis sebagai 5,2 *E* 5. Cari besaran-besaran fisika, kimia, astronomi, dan ekonomi yang nilainya dinyatakan dengan notasi eksponen. Misalkan kecepatan cahaya adalah 300.000 km/det, sehingga dalam notasi eksponen ditulis sebagai 3 *E* 8 m/det.

6. Bentuk Akar

Pengakaran (penarikan akar) suatu bilangan merupakan kebalikan dari pemangkatan suatu bilangan. Akar dilambangkan dengan notasi "$\sqrt{\ }$".

Definisi 1.6

Misalkan a bilangan real dengan $a > 0$, $\frac{p}{q}$ adalah bilangan pecahan dengan $q \neq 0$. $q \geq 2$. $a^{\frac{p}{q}} = c$, sehingga $c = \sqrt[q]{a^p}$ atau $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

Perhatikan permasalahan berikut.

Masalah-1.4

Seorang ahli ekonomi menemukan hubungan antara harga (h) dan banyak barang (b) yang dinyatakan dalam persamaan $h = 3\sqrt[3]{b^2}$. Jika nilai b = 8, maka berapa nilai h?

Alternatif Penyelesaian

$$h = 3\sqrt[3]{b^2} \Leftrightarrow h = 3\sqrt[3]{8^2}$$
$$\Leftrightarrow h = 3\sqrt[3]{64}$$
$$\Leftrightarrow h = 3\sqrt[3]{4 \times 4 \times 4} = 3 \times 4$$
$$\Leftrightarrow h = 12$$

Akar ke-n atau akar pangkat n dari suatu bilangan a dituliskan sebagai $\sqrt[n]{a}$, dengan a adalah bilangan pokok/basis dan n adalah indeks/eksponen akar.
Bentuk akar dapat diubah menjadi bentuk pangkat dan sebaliknya. Sebelum mempelajari bentuk akar, kamu harus memahami konsep bilangan rasional dan irrasional terlebih dahulu.

Bilangan rasional berbeda dengan bilangan irrasional. Bilangan rasional adalah bilangan real yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan a dan b bilangan bulat dan $b \neq 0$. Karena itu, bilangan rasional terdiri atas bilangan bulat, bilangan pecahan biasa, dan bilangan pecahan campuran. Sedangkan bilangan irasional adalah

bilangan real yang bukan bilangan rasional. Bilangan irasional merupakan bilangan yang mengandung pecahan desimal tak berhingga dan tak berpola. Contoh bilangan irasional, misalnya $\sqrt{2}$ = 1,414213562373..., e = 2,718..., dan π = 3,141592653…

Bilangan irasional yang menggunakan tanda akar ($\sqrt{\ }$) dinamakan *bentuk akar*. Tetapi ingat, tidak semua bilangan yang berada dalam tanda akar merupakan bilangan irasional. Contoh: $\sqrt{25}$ dan $\sqrt{64}$ bukan bentuk akar, karena nilai $\sqrt{25}$ adalah 5 dan nilai $\sqrt{64}$ adalah 8, keduanya bukan bilangan irasional.

Agar lebih jelas, perhatikan contoh berikut.

1. $\sqrt{20}$ adalah bentuk akar
2. $\sqrt[3]{27}$ bukan bentuk akar, karena $\sqrt[3]{27}$ = 3

7. Hubungan Bentuk Akar dan Bilangan Berpangkat

Perlu diketahui bahwa bilangan berpangkat memiliki hubungan dengan bentuk akar. Berdasarkan Sifat-4, jika a adalah bilangan real dengan $a > 0$, $\frac{p}{n}$ dan $\frac{m}{n}$ adalah bilangan pecahan dengan $n \neq 0$, maka $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = (a)^{\frac{m+p}{n}}$.

Dengan demikian $p^{\frac{1}{2}} \times p^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = p$ dan perhatikan bahwa $\sqrt{p} \times \sqrt{p} = p$, sehingga dapat disimpulkan $p^{\frac{1}{2}} = \sqrt{p}$.

Perhatikan untuk kasus di bawah ini

$p^{\frac{1}{3}} \times p^{\frac{1}{3}} \times p^{\frac{1}{3}} = p^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = p^1 = p$ dan perhatikan juga bahwa

$\sqrt[3]{p} \times \sqrt[3]{p} \times \sqrt[3]{p} = p$, sehingga berdasarkan Definisi 1.6 disimpulkan $p^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{p}$.

Latihan 1.3

Cermatilah dan buktikan apakah berlaku secara umum bahwa $p^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{p}$.

Perhatikan bahwa $p^{\frac{2}{3}} \times p^{\frac{2}{3}} \times p^{\frac{2}{3}} = p^2$, sehingga berdasarkan sifat perkalian bilangan berpangkat diperoleh:

$$\left(p^{\frac{2}{3}}\right)^3 = p^2 \qquad \text{Ingat, } (p^m)^n = p^{m \times n}$$

Diubah menjadi, $p^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{p^2}$.

Secara umum dapat disimpulkan bahwa $p^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{p^m} = \left(\sqrt[n]{p}\right)^m$ sebagaimana diberikan pada Definisi-1.6.

8. Operasi pada Bentuk Akar

a. Operasi Penjumlahan dan Pengurangan Bentuk Akar

Operasi penjumlahan dan pengurangan pada bentuk akar dapat dilakukan apabila bentuk akarnya senama. Bentuk akar senama adalah bentuk akar yang mempunyai eksponen dan basis sama. Untuk setiap p, q, dan r adalah bilangan real dan $r \geq 0$ berlaku sifat-sifat berikut.

$$p\sqrt[n]{r} + q\sqrt[n]{r} = (p+q)\sqrt[n]{r}$$
$$p\sqrt[n]{r} - q\sqrt[n]{r} = (p-q)\sqrt[n]{r}$$

Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh 1.6

Tentukan hasil penjumlahan dan pengurangan berikut dalam bentuk yang sederhana!

1. $3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = (3+4)\sqrt{5}$
   $= 7\sqrt{5}$
2. $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ (tidak dapat disederhanakan karena akarnya tidak senama)
3. $2\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{4} = (2-3)\sqrt[3]{4}$
   $= -\sqrt[3]{4}$
4. $3\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x} = (3-1)\sqrt[3]{x}$
   $= 2\sqrt[3]{x}$

b. Operasi Perkalian dan Pembagian Bentuk Akar

Pada pangkat pecahan telah dinyatakan bahwa $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Sifat perkalian dan pembagian bentuk akar dapat dicermati pada beberapa contoh berikut.

Contoh 1.7

1) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$
2) $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2^{\frac{6}{6}} = 2^1 = 2$
3) $4\sqrt[3]{5} \times 2\sqrt[3]{7} = (4 \times 2)\left(\sqrt[3]{5 \times 7}\right) = 8\sqrt[3]{35}$
4) $3\sqrt[5]{5} \times 5\sqrt[7]{5} = (3 \times 5)\left(5^{\frac{1}{5}} \times 5^{\frac{1}{7}}\right) = 15\left(5^{\frac{12}{35}}\right) = 15\sqrt[35]{5^{12}}$
5) $\dfrac{3\sqrt[3]{4}}{4\sqrt[3]{5}} = \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}$
6) $\dfrac{2\sqrt[4]{3}}{3\sqrt[4]{5}} = \dfrac{2}{3}\sqrt[4]{\dfrac{3}{5}}$

Latihan 1.4

1) Buktikan: jika a bilangan real dan $a > 0$, maka $\sqrt[n]{a^n} = a$.
2) Buktikan: jika a, b, c, dan d bilangan real, $c > 0$ dan $d > 0$, maka $a\sqrt[n]{c} \times b\sqrt[n]{d} = ab\sqrt[n]{cd}$.
3) Buktikan: jika a, b, c, dan d bilangan real, $c > 0$ dan $d > 0$, maka $\dfrac{a\sqrt[n]{c}}{b\sqrt[n]{d}} = \dfrac{a}{b}\sqrt[n]{\dfrac{c}{d}}$.

c. Merasionalkan Penyebut Bentuk Akar

Kita tahu bahwa bentuk-bentuk akar seperti $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{3} + \sqrt{7}, \sqrt{2} - \sqrt{6}$, dan seterusnya merupakan bilangan irasional. Jika bentuk akar tersebut menjadi penyebut pada suatu pecahan, maka dikatakan sebagai penyebut irasional.

Penyebut dalam bentuk akar dapat diubah menjadi bentuk pangkat rasional. Cara merasionalkan penyebut bentuk akar tergantung pada bentuk akar itu sendiri. Akan tetapi, prinsip dasarnya sama; yaitu mengalikan dengan bentuk akar sekawannya. Proses ini dinamakan *merasionalkan penyebut*.

1) **Merasionalkan bentuk** $\frac{p}{\sqrt{q}}$

Bentuk $\frac{p}{\sqrt{q}}$ dirasionalkan dengan cara mengalikannya dengan $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}}$.

$$\frac{p}{\sqrt{q}} = \frac{p}{\sqrt{q}}.\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}} = \frac{p}{q}\sqrt{q}$$

Diskusi

Menurutmu mengapa penyebut bilangan pecahan berbentuk akar harus dirasionalkan?

Mengapa kita harus mengalikan $\frac{p}{\sqrt{q}}$ dengan $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}}$?

Karena $\sqrt{q}$ selalu positif, maka $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}}$ = 1. Jadi perkalian $\frac{p}{\sqrt{q}}$ dengan $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}}$ tidak akan mengubah nilai $\frac{p}{\sqrt{q}}$ namun menyebabkan penyebut menjadi bilangan rasional.

2) **Merasionalkan bentuk** $\frac{r}{p+\sqrt{q}}$, $\frac{r}{p-\sqrt{q}}$, $\frac{r}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$, dan $\frac{r}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}$

Sebelum kita merasionalkan bentuk-bentuk akar di atas, perlu kita pahami bentuk-bentuk campuran bilangan rasional dan bilangan irasional.

a) Jika bilangan rasional dijumlahkan dengan bilangan irasional maka hasilnya bilangan irasional. Contoh $2+\sqrt{7} = 2+2{,}645751.... = 4{,}645751...$ (bilangan irasional).

b) Jika bilangan irasional dijumlahkan dengan bilangan irasional maka hasilnya bilangan irasional atau rasional, Contoh (1) $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ = 2,236068.... + 2,645575... = 4,881643... (bilangan irasional), (2) $2\sqrt{5} + (-2\sqrt{5}) = 0$ (bilangan rasional). Jika dua bilangan irasional dikurangkan, bagaimana hasilnya?

c) Jika bilangan rasional dikalikan dengan bilangan irrasional, maka hasilnya bilangan rasional atau irasional. Contoh. $0\times\sqrt{2} = 0$ (0 adalah bilangan rasional) atau $2\times\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ adalah bilangan irasional

d) Jika bilangan irasional dikalikan dengan bilangan irasional, maka hasilnya dapat bilangan rasional atau bilangan irasional.

Contoh:

- $\sqrt{5}\times\sqrt{125} = \sqrt{5}\times 5\sqrt{5} = 25$ (25 adalah bilangan rasional)
- $\sqrt{3}\times\sqrt{5} = \sqrt{15}$ ($\sqrt{15}$ adalah bilangan irasional)

e) $\sqrt[n]{a}$ disebut bentuk akar apabila hasil akar pangkat n dari a adalah bilangan irasional.

Untuk merasionalkan bentuk $\dfrac{r}{p+\sqrt{q}}$, $\dfrac{r}{p-\sqrt{q}}$, $\dfrac{r}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$, dan $\dfrac{r}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}$.

dapat dilakukan dengan memperhatikan sifat perkalian $(a + b)(a – b) = a^2 – b^2$, sehingga

$$\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)=\left(\sqrt{p}\right)^2-\left(\sqrt{q}\right)^2=p-q$$

$$\left(p+\sqrt{q}\right)\left(p-\sqrt{q}\right)=p^2-\left(\sqrt{q}\right)^2=p^2-q$$

Bentuk $\left(p+\sqrt{q}\right)$ dan bentuk $\left(p-\sqrt{q}\right)$ saling sekawan, bentuk $\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)$ dan $\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)$ juga saling sekawan. Jika perkalian bentuk sekawan tersebut dilakukan maka dapat merasionalkan bentuk akar. Untuk p, q dan r bilangan real.

$$\frac{r}{\left(p+\sqrt{q}\right)}=\frac{r}{\left(p+\sqrt{q}\right)}\cdot\frac{\left(p-\sqrt{q}\right)}{\left(p-\sqrt{q}\right)}=\frac{r\left(p-\sqrt{q}\right)}{\left(p^2-q\right)} \text{ dimana } q \geq 0 \text{ dan } p^2 \neq q.$$

$$\frac{r}{\left(p-\sqrt{q}\right)}=\frac{r}{\left(p-\sqrt{q}\right)}\cdot\frac{\left(p+\sqrt{q}\right)}{\left(p+\sqrt{q}\right)}=\frac{r\left(p+\sqrt{q}\right)}{\left(p^2-q\right)} \text{ dimana } q \geq 0 \text{ dan } p^2 \neq q.$$

$$\frac{r}{\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)}=\frac{r}{\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)}{\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)}=\frac{r\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)}{\left(p-q\right)} \text{ dimana } p \geq 0,\ q \geq 0 \text{ dan } p \neq q$$

$$\frac{r}{\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)}=\frac{r}{\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)}{\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)}=\frac{r\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)}{\left(p-q\right)} \text{ dimana } p \geq 0,\ q \geq 0 \text{ dan } p \neq q$$

Contoh 1.8

Rasionalkan penyebut pecahan-pecahan berikut.

a. $$\frac{2}{3-\sqrt{2}}=\frac{2}{3-\sqrt{2}}\times\frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$$ (kalikan penyebut dengan bentuk sekawannya)

$$=\frac{2(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{2\left(3+\sqrt{2}\right)}{9-2}$$

$$=\frac{6+2\sqrt{2}}{7}$$

$$=\frac{6}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{7}$$

b. $$\frac{3}{6+\sqrt{3}}=\frac{3}{6+\sqrt{3}}\times\frac{6-\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}$$ (kalikan penyebut dengan bentuk sekawannya)

$$=\frac{3\left(6-\sqrt{3}\right)}{\left(6+\sqrt{3}\right)\left(6-\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{18-3\sqrt{3}}{36-3}$$

$$=\frac{18-3\sqrt{3}}{33}$$

$$=\frac{6}{11}-\frac{\sqrt{3}}{11}$$

c. $$\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$$ (kalikan penyebut dengan bentuk sekawannya)

$$= \frac{4\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}$$

$$= \frac{4\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(7-5\right)}$$

$$= \frac{4\sqrt{7}+4\sqrt{5}}{2}$$

$$= 2\sqrt{7}+2\sqrt{5}$$

Contoh 1.9

Pikirkan cara termudah untuk menghitung jumlah bilangan-bilangan berikut

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} = \ldots ?$$

Permasalahan di atas dapat diselesaikan dengan cara merasionalkan penyebut tiap suku; yaitu,

$$= \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{\sqrt{1}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} +$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{4}-\sqrt{5}}{\sqrt{4}-\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} \times \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{\sqrt{99}-\sqrt{100}}$$

$$= \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{-1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{-1} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{5}}{-1} + \ldots + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{-1}$$

$$= -\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{4}-\sqrt{4}+\sqrt{5}-\ldots-\sqrt{99}+\sqrt{100}$$

$$= -\sqrt{1}+\sqrt{100} = -1+10 = 9.$$

Contoh 1.10

Tentukan nilai dari $\dfrac{1}{\sqrt{3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3+\ldots}}}}$

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan pola bilangan berikut. Misalkan,

$P = 3 + \dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3+\ldots}}$ atau $P = 3 + \dfrac{1}{P}$

$\Leftrightarrow \quad P^2 - 3P - 1 = 0$

Dengan mengubah ke bentuk kuadrat sempurna diperoleh:

$$\Leftrightarrow \quad (P - \frac{3}{2})^2 - \frac{13}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad P = \frac{6+2\sqrt{13}}{4}$$

Jadi, nilai $\dfrac{1}{\sqrt{3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3+\ldots}}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{6+2\sqrt{13}}{4}}} = \sqrt{\dfrac{4}{6+2\sqrt{13}}}$

Dengan merasionalkan bentuk tersebut, maka

$$\sqrt{\frac{4}{6+2\sqrt{13}}} = \sqrt{\frac{4}{6+2\sqrt{13}}.\frac{6-2\sqrt{13}}{6-2\sqrt{13}}} = \sqrt{\frac{4(6-2\sqrt{13})}{-16}}$$

$$= \frac{\sqrt{2\sqrt{13}-6}}{2}$$

Jadi, $\dfrac{1}{\sqrt{3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3+\ldots}}}} = \dfrac{\sqrt{2\sqrt{13}-6}}{2}$

3) Menyederhanakan bentuk $\sqrt{(p+q)\pm 2\sqrt{pq}}$

Sekarang kita akan menyederhanakan bentuk akar yang mempunyai bentuk khusus; yaitu, bentuk $\sqrt{(p+q)\pm 2\sqrt{pq}}$. Perhatikan proses berikut ini! Diskusikanlah masalah berikut dengan temanmu!

a. $\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)$

b. $\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)$

Dari hasil kegiatan yang kamu lakukan, kamu akan memperoleh bentuk sederhananya menjadi $\sqrt{(p+q)\pm 2\sqrt{pq}}$. Selanjutnya, perhatikan contoh berikut!

Contoh 1.11

Sederhanakan bentuk akar berikut ini!

a. $\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{(5+3)+2\sqrt{5\times 3}} = \sqrt{5+2\sqrt{5\times 3}+3}$

$= \sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$

b. $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{5-4\sqrt{5}+4} = \sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2} = \sqrt{5}-2$

Uji Kompetensi 1.2

1. Rasionalkan penyebut pecahan-pecahan berikut ini!

   a. $\frac{5}{\sqrt{15}}$

   b. $\frac{2}{\sqrt{20}}$

   c. $\frac{3}{\sqrt{18}}$

   d. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{24}}$

   e. $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{48}}$

   f. $\frac{2a}{3\sqrt{a}}$

2. Rasionalkan penyebut pecahan-pecahan berikut ini!

   a. $\frac{1}{5-\sqrt{3}}$

   b. $\frac{4-\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$

   c. $\frac{2a}{3a+\sqrt{5}}$

   d. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{10}}$

   e. $\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

   f. $\frac{\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{150}}{\sqrt{96}}$

3. Sederhanakanlah bentuk berikut ini!

   a. $\frac{15}{\sqrt{75}}-\frac{1}{2-\sqrt{3}}$

   b. $\frac{7}{2+\sqrt{8}}+\frac{11}{2-\sqrt{8}}$

   c. $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}-1}+\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

   d. $\frac{10}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\frac{12}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}+\frac{14}{\sqrt{7}+\sqrt{8}}$

4. Jika $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=a+b\sqrt{6}$, tentukan nilai $a+b$!

5. Sederhanakan bentuk akar berikut ini!

   a. $\sqrt{19+8\sqrt{3}}$

   b. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

   c. $\sqrt{43+12\sqrt{7}}$

   d. $\sqrt{21-4\sqrt{5}}$

   e. $\sqrt{18+8\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$

   f. $\frac{3-\sqrt{14+6\sqrt{5}}}{\sqrt{21+12\sqrt{3}}}$

SOAL TANTANGAN

1. Tentukanlah nilai dari:

   a. $\sqrt[3]{2\sqrt{3\sqrt[3]{2\sqrt{3\sqrt[3]{2\sqrt{3\sqrt[3]{\ldots}}}}}}}$

   b. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots}}}}}}$

   c. $1+\cfrac{1}{\sqrt{1+\cfrac{1}{\sqrt{1+\cfrac{1}{\sqrt{\ldots}}}}}}$

2. Jika a, b bilangan asli dengan $a \leq b$ dan $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}}$ adalah bilangan rasional, tentukan pasangan (a,b). (OSN 2005/2006)

3. Nyatakan b dalam a dan c dari persamaan $\dfrac{\sqrt[3]{b}\sqrt{c}}{\sqrt{c}\sqrt[3]{a}} = abc$.

4. Sederhanakan bentuk $\sqrt[4]{49-20\sqrt{6}}$.

5. Tentukan nilai a dan b dari

   $$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1.000.000}+\sqrt{1.000.001}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

6. Hitunglah

   $\sqrt{54+14\sqrt{5}}+\sqrt{12-2\sqrt{35}}+\sqrt{32-10\sqrt{7}} =$

7. Jika $(3+4)(3^2+4^2)(3^4+4^4)(3^8+4^8)(3^{16}+4^{16})(3^{32}+4^{32}) = (4^x-3^y)$, tentukan nilai $x-y$.

Projek

Tidak semua bilangan pecahan desimal tak hingga adalah bilangan irrasional. Sebagai contoh 0,333... bukanlah bilangan irrasional, karena dapat dinyatakan sebagai pecahan $\frac{1}{3}$. Kenyataannya, bilangan pecahan desimal tak hingga dengan desimal berulang seperti 0,333... dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan.

a. Rancang sebuah prosedur untuk mengkonversi bilangan pecahan desimal tak hingga dengan desimal berulang menjadi bilangan pecahan. Beri contoh penerapan prosedur yang kamu rancang.

b. Berdasarkan penjelasan di atas, karena bilangan irasional π tidak mungkin sama dengan $\frac{22}{7}$, karena $\frac{22}{7}$ hanyalah pendekatan untuk nilai π sebenarnya.

1) Berapakah kesalahan $\frac{22}{7}$ terhadap nilai π?
2) Dengan menggunakan prosedur yang kamu rancang di atas tentukan pecahan yang lebih mendekati nilai π daripada $\frac{22}{7}$ (kesalahannya lebih kecil).
3) Apakah lebih baik menggunakan angka yang kamu peroleh daripada menggunakan $\frac{22}{7}$
4) Buat laporan projek ini dan paparkan di depan kelas.

9. Menemukan Konsep Logaritma

Telinga manusia dapat mendengar suara dengan intensitas yang rentangnya luar biasa. Suara paling keras yang dapat didengar oleh orang yang sehat tanpa merusak gendang telinga memiliki intensitas 1 triliun (1.000.000.000.000) kali lebih kuat dari pada suara paling rendah yang bisa didengar.

Menghitung intensitas bunyi dengan rentang begitu besar tentu sangat tidak nyaman. Namun, dengan logaritma perhitungan ini akan menjadi lebih sederhana. Alexander Graham Bell (1847–1922) menggunakan logaritma untuk menghitung skala bunyi. Skala ini dinamakan *decibel*, dan didefinisikan sebagai $D = 10\log\frac{I}{I_0}$, dengan D adalah skala *decibel* bunyi, I adalah intensitas bunyi dengan satuan Watt per meter persegi $\left(W/m^2\right)$, dan I_0 adalah intensitas bunyi paling minimum yang bisa didengar orang yang sehat, yaitu $1,0 \times 10^{-12}$. Sebagai gambaran, berikut ini adalah tabel intensitas bunyi beberapa objek.

Tabel 1.1 Intensitas bunyi beberapa suara

Intensitas Bunyi $\left(W/m^2\right)$	Intensitas Bunyi
$1,0 \times 10^{-12}$	Ambang batas bawah pendengaran
$5,2 \times 10^{-10}$	Suara bisik-bisik
$3,2 \times 10^{-6}$	Percakapan normal
$8,5 \times 10^{-4}$	Lalu lintas padat
$8,3 \times 10^{2}$	Pesawat jet lepas landas

Banyak masalah kehidupan yang penyelesaiannya melibatkan berbagai aturan dan sifat logaritma. Cermatilah masalah berikut.

Masalah-1.5

Yusuf adalah seorang pelajar kelas X di kota Kupang. Ia senang berhemat dan menabung uang. Selama ini dia berhasil menabung uangnya sejumlah Rp1.000.000,00 di dalam sebuah celengan yang terbuat dari tanah liat. Agar uangnya lebih aman, ia menabung uangnya di sebuah bank dengan bunga 10% per tahun. Berapa lama Yusuf menyimpan uang tersebut agar menjadi Rp1.464.100,00.

Pahami masalah dan tuliskan informasi yang diketahui pada soal. Buat tabel keterkaitan antara jumlah uang Yusuf dengan waktu penyimpanan. Selanjutnya temukan model matematika yang menyatakan hubungan total uang simpanan dengan waktu menyimpan dan bunga uang.

Diketahui:
Modal awal (M_0) = 1.000.000 dan besar uang tabungan setelah sekian tahun (M_t) = 1.464.100, besar bunga yang disediakan bank untuk satu tahun adalah 10% = 0,1.

Ditanya:
Berapa tahun (t) Yusuf menabung agar uangnya menjadi (M_t) = 1.464.100.-

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan pola pertambahan jumlah uang Yusuf setiap akhir tahun pada tabel berikut.

Tabel 1.2 Perhitungan besar suku bunga pada setiap akhir tahun *t*

Akhir Tahun	Bunga uang (10% × Total Uang)	Total = Modal + Bunga	Pola Total Uang pada saat *t*
0	0	Rp1.000.000,00	$1.000.000\ (1+0,1)^0$
1	Rp100.000,00	Rp1.100.000,00	$1.000.000\ (1+0,1)^1$
2	Rp110.000,00	Rp1.210.000,00	$1.000.000\ (1+0,1)^2$
3	Rp121.000,00	Rp1.331.000,00	$1.000.000\ (1+0,1)^3$
4	Rp133.100,00	Rp1.464.100,00	$1.000.000\ (1+0,1)^4$

Dari tabel di atas, jelas kita lihat bahwa Yusuf harus menabung selama 4 tahun agar uangnya menjadi Rp1.464.100,00. Selanjutnya, kita akan menyelesaikan permasalahan di atas dengan menggunakan logaritma, setelah kita mengenal sifat-sifat logaritma.

Dalam pembahasan sebelumnya, kita telah membahas tentang pemangkatan suatu bilangan. Kita tahu bahwa 2^3 hasilnya adalah 8 yang dapat ditulis $2^3 = 8$. Sehingga bila ada persamaan $2^x = 8$, maka nilai x yang memenuhi persamaan tersebut adalah $x = 3$.

Perhatikan Tabel-1.2, kita peroleh $1.464.100 = 1.000.000\ (1+0,1)^4$. Jika $4 = t$, maka persamaan tersebut menjadi $1.464.100 = 1.000.000\ (1 + 0,1)^t$. Hal ini dapat dikaitkan dengan bentuk eksponen yang sudah dipelajari sebelumnya, yaitu $a^c = b$, dengan memisalkan $a = (1 + 0,1)$, $b = 1,\ 464100$, dan $c = t$. Bagaimana cara menentukan nilai $c = t = 4$?

Permasalahan ini dapat diselesaikan menggunakan invers dari eksponen, yaitu logaritma. Logaritma, dituliskan sebagai "log", didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.7

Misalkan $a, b \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, dan c rasional maka ${}^a\log b = c$ jika dan hanya jika $a^c = b$.

dimana: a disebut basis ($0 < a < 1$ atau $a > 1$)
b disebut numerus ($b > 0$)
c disebut hasil logaritma

Diskusi

Mengapa ada syarat $a > 0$ dan $a \neq 1$ dalam definisi di atas? Diskusikan dengan temanmu atau guru. Demikian juga dengan $b > 0$.

Berdasarkan definisi di atas, kita dapatkan bentuk-bentuk berikut.

- $2^x = 5 \Leftrightarrow x = {}^2\log 5$ (notasi $\Leftrightarrow$ dibaca jika dan hanya jika)
- $3^y = 8 \Leftrightarrow y = {}^3\log 8$
- $5^z = 3 \Leftrightarrow z = {}^5\log 3$

Catatan:

- Jika logaritma dengan basis e (yaitu $e \approx 2,718\ldots$, e adalah bilangan *Euler*), maka ${}^e\log b$ ditulis $\ln b$.
- Bilangan pokok (basis) 10 tidak ditulis, sehingga ${}^{10}\log a = \log a$.

Masalah-1.6

Di tahun 2013 jumlah penduduk Negara X adalah 100 juta orang. Bila pertambahan penduduk 1% per tahun, berapa jumlah penduduk negara itu pada akhir tahun 2017 dan tahun 2038? Pada tahun berapa jumlah penduduk negara itu menjadi dua kali lipat?

Diketahui:

Jumlah penduduk Negara X pada tahun 2013 adalah 100 juta jiwa.
Persentase pertambahan penduduk per tahun adalah 1%

Ditanya:

a) Jumlah penduduk pada tahun 2017 dan tahun 2038

b) Pada tahun berapa, jumlah penduduk menjadi dua kali lipat.

Alternatif Penyelesaian

Jumlah penduduk di awal (P_0) = 100 juta

Misalkan: P_t adalah jumlah penduduk pada tahun t

r adalah persentase pertambahan penduduk.

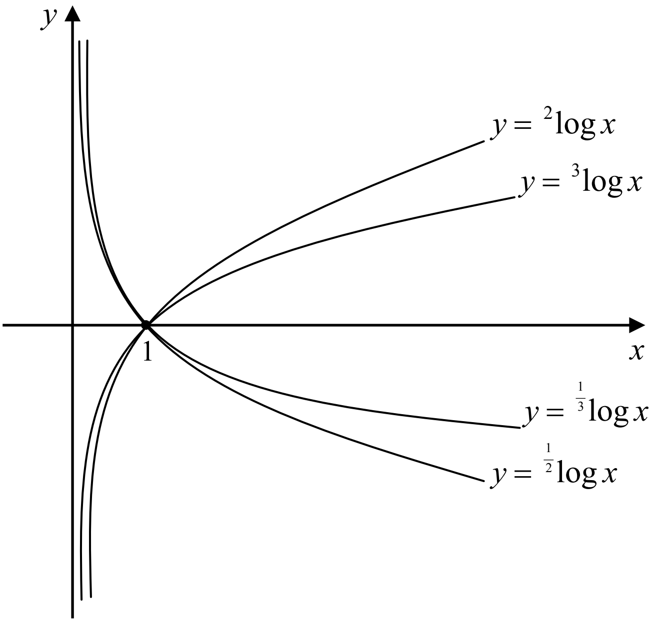
Tabel 1.3 Perhitungan jumlah penduduk Negara X untuk setiap tahun

Akhir Tahun	Pertambahan penduduk (1% × total penduduk) (juta)	Total = Jumlah Penduduk awal + Pertambahan (juta)	Pola Total Penduduk pada saat *t*
2013	0	100	$100\,(1+0{,}01)^0$
2014	1	101	$100\,(1+0{,}01)^1$
2015	1,01	102,01	$100\,(1+0{,}01)^2$
2016	1,0201	103,0301	$100\,(1+0{,}01)^3$
2017	1,030301	104,060401	$100\,(1+0{,}01)^4$

Dari tabel di atas, jelas kita lihat bahwa total penduduk pada akhir tahun 2017 adalah 104.060.401. Selanjutnya, kita akan menyelesaikan permasalahan di atas dengan menggunakan logaritma, setelah kita mengenal sifat-sifat logaritma.

Perhatikan Tabel-1.3 di atas, kita peroleh $104.060.401 = 100\,(1+0{,}01)^4$. Jika $4 = t$, maka persamaan tersebut menjadi $104.060.401 = 100\,(1+0{,}01)^t$. Hal ini dapat dikaitkan dengan bentuk eksponen yang sudah dipelajari sebelumnya, yaitu $a^c = b$, dengan memisalkan $a = (1 + 0{,}01)$, $b = 104.060.401$, dan $c = t$. Bagaimana cara menentukan nilai $c = t = 4$? Selanjutnya bagaimana menentukan jumlah penduduk pada akhir tahun 2038 dan tahun berapa jumlah penduduk Negara X menjadi dua kali lipat.

Selanjutnya cermati grafik fungsi $y = f(x) = {}^{2}\log x$, $f(x) = -\,{}^{2}\log x$, $f(x) = {}^{3}\log x$ dan $f(x) = -{}^{3}\log x$ yang disajikan berikut.



Gambar 1.2 Grafik Fungsi Logaritma

Perhatikan grafik fungsi di atas. Isilah tabel berikut.

Tabel 1.3 Perhitungan Nilai Fungsi Logaritma

	x								
	1/2	1/3	1/4	1	2	3	4	8	9
$f(x) = {}^{2}\log x$				0					
$f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$				0					
$f(x) = {}^{3}\log x$				0					
$f(x) = {}^{\frac{1}{3}}\log x$				0					

Coba temukan sifat-sifat grafik fungsi logaritma pada Gambar 1.2 di atas.

Contoh 1.12

1. Tulislah bentuk logaritma dari:
   a. $2^5 = 32$ maka ${}^2\log 32 = 5$
   b. $4^3 = 64$ maka ${}^4\log 64 = 3$
   c. $2^{-2} = \frac{1}{4}$ maka ${}^2\log \frac{1}{4} = -2$
2. Tulislah bentuk pangkat dari:
   a. ${}^{11}\log 121 = 2$ maka $11^2 = 121$
   b. ${}^3\log 81 = 4$ maka $3^4 = 81$
   c. $\log 1000 = 3$ maka $10^3 = 1000$
3. Hitunglah nilai logaritma berikut.
   a. ${}^2\log 2 = 1$ karena $2^1 = 2$
   b. ${}^2\log 1 = 0$ karena $2^0 = 1$
   c. ${}^2\log 128 = 7$ karena $2^7 = 128$

10. Sifat-sifat Logaritma

Dari Definisi 1.7, logaritma merupakan invers dari perpangkatan. Oleh karena itu terdapat 3 sifat dasar logaritma, yaitu:

Sifat-6. Sifat Dasar Logaritma

Misalkan a dan n bilangan real, $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka
1. ${}^a\log a = 1$
2. ${}^a\log 1 = 0$
3. ${}^a\log a^n = n$

Contoh 1.13

1. ${}^a\log a = x \Leftrightarrow a^x = a$ sehingga $x = 1$ atau ${}^a\log a = 1$
2. ${}^a\log 1 = y \Leftrightarrow a^y = 1$. Karena $a^0 = 1$, maka $y = 0$
3. ${}^a\log a^n = z \Leftrightarrow a^z = a^n$ sehingga $z = n$ serta ${}^a\log a^n = n$

BEBERAPA SIFAT OPERASI LOGARITMA

Sifat-7

Untuk a, b, dan c bilangan real positif, $a \neq 1$, dan $b > 0$, berlaku ${}^{a}\log(b \times c) = {}^{a}\log b + {}^{a}\log c$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 1.7 maka diperoleh:

$${}^{a}\log b = x \Leftrightarrow b = a^{x}$$

$${}^{a}\log c = y \Leftrightarrow c = a^{y}$$

Dengan mengalikan nilai b dengan c, maka:

$$\begin{aligned} b \times c = a^{x} \times a^{y} &\Leftrightarrow b \times c = a^{x+y} \\ &\Leftrightarrow {}^{a}\log (b \times c) = x + y && \text{Substitusi } x \text{ dan } y \\ &\Leftrightarrow {}^{a}\log (b \times c) = {}^{a}\log b + {}^{a}\log c && \text{(terbukti)} \end{aligned}$$

Sifat-8

Untuk a, b, dan c bilangan real dengan $a > 0$, $a \neq 1$, dan $b > 0$, berlaku ${}^{a}\log\left(\frac{b}{c}\right) = {}^{a}\log b - {}^{a}\log c$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 1.7, diperoleh:

${}^{a}\log b = x \Leftrightarrow b = a^{x}$

${}^{a}\log c = y \Leftrightarrow c = a^{y}$

Dengan membagi b dengan c, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{b}{c} = \frac{a^{x}}{a^{y}} &\Leftrightarrow \frac{b}{c} = a^{x-y} \\ &\Leftrightarrow {}^{a}\log\left(\frac{b}{c}\right) = {}^{a}\log a^{x-y} \\ &\Leftrightarrow {}^{a}\log\left(\frac{b}{c}\right) = x - y && \text{Substitusi } x \text{ dan } y \\ &\Leftrightarrow {}^{a}\log\left(\frac{b}{c}\right) = {}^{a}\log b - {}^{a}\log c && \text{(terbukti)} \end{aligned}$$

Sifat-9

Untuk a, b, dan n bilangan asli, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, berlaku

$${}^{a}\log b^{n} = n\,{}^{a}\log b$$

Bukti:

$${}^{a}\log b^{n} = {}^{a}\log\left(\underbrace{b \times b \times b \times \ldots \times b}_{n\ faktor}\right) \qquad \text{ingat, } a^{m} = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m\ faktor}$$

$$\Leftrightarrow\ {}^{a}\log b^{n} = \underbrace{{}^{a}\log b + {}^{a}\log b + \ldots + {}^{a}\log b}_{n\ faktor} \qquad \text{ingat, Sifat-8}$$

$$\Leftrightarrow\ {}^{a}\log b^{n} = n\,{}^{a}\log b \quad \text{(terbukti)}$$

Sifat-10

Untuk a, b, dan c bilangan real positif, $a \neq 1$, $b \neq 1$, dan $c \neq 1$, berlaku

$${}^{a}\log b = \frac{{}^{c}\log b}{{}^{c}\log a} = \frac{1}{{}^{b}\log a}$$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 1.7, diperoleh:

${}^{a}\log b = x \Leftrightarrow b = a^{x}$

Ambil sembarang c bilangan real dan $c \neq 1$ sedemikian sehingga:

$${}^{c}\log b = {}^{c}\log a^{x} \Leftrightarrow {}^{c}\log b = x\,{}^{c}\log a \qquad \text{ingat, Sifat-9}$$

$$\Leftrightarrow\ x = \frac{{}^{c}\log b}{{}^{c}\log a} \qquad \text{substitusi nilai } x$$

$$\Leftrightarrow\ {}^{a}\log b = \frac{{}^{c}\log b}{{}^{c}\log a} \quad \text{(terbukti)}$$

Karena c bilangan real dan $c \neq 1$ sembarang dengan ketentuan di atas dapat dipenuhi $c = b$ sehingga diperoleh

$$\Leftrightarrow\ {}^{a}\log b = \frac{{}^{b}\log b}{{}^{b}\log a} \qquad \text{ingat, Sifat pokok 2}$$

$$\Leftrightarrow\ = \frac{1}{{}^{b}\log a} \quad \text{(terbukti)}$$

Sifat-11

Untuk a, b, dan c bilangan real positif dengan $a \neq 1$ dan $b \neq 1$, berlaku

$^{a}\log b \times {}^{b}\log c = {}^{a}\log c$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 1.7 maka diperoleh:

$^{a}\log b = x \Leftrightarrow b = a^{x}$

$^{b}\log c = y \Leftrightarrow c = b^{y}$

$^{a}\log b \times {}^{b}\log c = {}^{a}\log a^{x} \times {}^{b}\log b^{y}$

$\Leftrightarrow \; ^{a}\log b \times {}^{b}\log c = {}^{a}\log b \times {}^{b}\log b^{y}$ ingat, $c = b^{y}$

$\Leftrightarrow \; ^{a}\log b \times {}^{b}\log c = y \, {}^{a}\log b \times {}^{b}\log b$ ingat, Sifat pokok 2

$\Leftrightarrow \; ^{a}\log b \times {}^{b}\log c = y \, {}^{a}\log b$ ingat, Sifat 6

$\Leftrightarrow \; ^{a}\log b \times {}^{b}\log c = {}^{a}\log b^{y}$ ingat, $c = b^{y}$

$\Leftrightarrow \; ^{a}\log b \times {}^{b}\log c = {}^{a}\log c$ (terbukti)

Sifat-12

Untuk a dan b bilangan real positif dengan $a \neq 1$, berlaku

$^{a^{m}}\log b^{n} = \frac{n}{m}\left({}^{a}\log b\right)$, dengan m, n bilangan rasional dan $m \neq 0$.

Bukti: (Silahkan coba sendiri)

Sifat-13

Untuk a dan b bilangan real positif $a \neq 1$, berlaku $a^{{}^{a}\log b} = b$

Bukti: (coba sendiri)

Logaritma saling *invers* dengan eksponen. Misalkan $^{a}\log b = c$. Kita subtitusikan $^{a}\log b = c$ ke $a^{c} = (a)^{{}^{a}\log b}$, sehingga diperoleh $a^{c} = b$

Untuk mendalami sifat-sifat di atas, perhatikan beberapa contoh berikut.

Contoh 1.14

Mari kita tinjau kembali **Masalah-1.5**. Kita akan menyelesaikan masalah tersebut dengan menggunakan konsep logaritma. Cermatilah kembali **Tabel 1.2**. Kita dapat menyatakan hubungan total jumlah uang untuk t tahun sebagai berikut:

$M_t = M_0\,(1+i)^t$

dimana M_t : total jumlah uang diakhir tahun t

t : periode waktu

i : bunga uang

Dengan menggunakan notasi di atas, maka soal tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

Diketahui : $M_0 = 1.000.000$, $M_t = 1.464.100$, $i = 0,1$

Ditanya : t

Alternatif Penyelesaian

$1.464.100 = 1.000.000\,(1+0,1)^t$

$\Leftrightarrow \log 1.464.100 = \log\,[1.000.000\,(1,1)^t\,]$

$\Leftrightarrow \log 1.464.100 = \log 1.000.000 + \log\,(1,1)^t$

$\Leftrightarrow \log 1.464.100 - \log 1.000.000 = t \log 1,1$

$$\Leftrightarrow \log \frac{1.464.100}{1.000.000} = t \log 1,1$$

$$\Leftrightarrow \log \frac{14.641}{10.000} = t \log 1,1$$

$$\Leftrightarrow \log \left(\frac{11}{10}\right)^4 = t \log 1,1$$

$\Leftrightarrow 4 \log\,(1,1) = t \log 1,1$

$\Rightarrow t = 4$

Jadi, Yusuf harus menabung selama 4 tahun agar mendapatkan uang sebesar Rp1.464.100,00.

Contoh 1.15

Misalkan $\log^2 a$ adalah notasi untuk $(\log a)^2$. Tentukan nilai a yang memenuhi $\log^2 a + \log a = 6$!

Alternatif Penyelesaian

Misalkan $P = \log a$

$$
\begin{aligned}
\log^2 a + \log a = 6 &\Leftrightarrow (\log a)^2 + (\log a) = 6\\
&\Leftrightarrow P^2 + P - 6 = 0\\
&\Leftrightarrow (P + 3)(P - 2) = 0\\
&\Leftrightarrow P = -3 \text{ atau } P = 2\\
&\Leftrightarrow \log a = -3 \text{ atau } \log a = 2\\
&\Leftrightarrow a = 10^{-3} \text{ atau } a = 10^2
\end{aligned}
$$

Jadi, nilai a yang memenuhi persamaan di atas adalah a = 0,001 atau a = 100.

Contoh 1.16

Nyatakan b dalam a supaya berlaku ${}^a\log b - 2\,{}^b\log a = 1$.

Alternatif Penyelesaian

Ingat, ${}^b\log a = \dfrac{1}{{}^a\log b}$

Misalkan: $P = {}^a\log b$

$$
\begin{aligned}
&{}^a\log b - 2\,{}^b\log a = 1\\
\Leftrightarrow\ & {}^a\log b - \frac{2}{{}^a\log b} - 1 = 0\\
\Leftrightarrow\ & P - \frac{2}{P} - 1 = 0\\
\Leftrightarrow\ & P^2 - P - 2 = 0\\
\Leftrightarrow\ & (P + 1)(P - 2) = 0\\
\Leftrightarrow\ & P = -1 \text{ atau } P = 2\\
\Leftrightarrow\ & {}^a\log b = -1 \text{ atau } {}^a\log b = 2
\end{aligned}
$$

Sekarang akan kita nyatakan b dalam a, yaitu,

$$
\begin{aligned}
{}^a\log b = -1 &\Leftrightarrow a^{{}^a\log b} = a^{-1} \quad \text{atau} \quad {}^a\log b = 2 \Leftrightarrow a^{{}^a\log b} = a^2\\
&\Leftrightarrow b = a^{-1} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow b = a^2\\
&\Leftrightarrow b = \frac{1}{a}
\end{aligned}
$$

Jadi, $b = \dfrac{1}{a}$ atau $b = a^2$.

Uji Kompetensi 1.3

1. Tuliskan dalam bentuk logaritma dari:
   a. $5^3 = 125$ c. $4^3 = 64$
   b. $10^2 = 100$ d. $6^1 = 6$
2. Tuliskan dalam bentuk pangkat:
   a. $\log 0{,}01 = -2$
   b. ${}^{0,5}\log 0{,}0625 = 4$
   c. ${}^{2}\log \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$
   d. ${}^{3}\log \frac{1}{9} = -2$
3. Hitunglah nilai setiap bentuk;
   a. $\log 10^4$ d. ${}^2\log 0{,}25$
   b. ${}^5\log 125$ e. ${}^4\log 4^{10}$
   c. ${}^3\log \frac{1}{27}$ f. ${}^5\log 1$
4. Diketahui log 2 = 0,3010; log 3 = 0,4771 dan log 7 = 0,8451 tentukan:
   a. log 18 c. log 10,5
   b. log 21 d. $\log \frac{1}{7}$
5. Sederhanakan
   a. $\frac{2}{3} \times {}^2\log 64 - \frac{1}{2} \times {}^2\log 16$
   b. ${}^a\log 2x + 3\left({}^a\log x - {}^a\log y\right)$
   c. ${}^a\log \frac{a}{\sqrt{x}} - {}^a\log \sqrt{ax}$
   d. $\log \sqrt{a} + \log \sqrt{b} - \frac{1}{2}\log ab$
6. Jika ${}^2\log 3 = a$ dan ${}^3\log 5 = b$, nyatakan bentuk berikut dalam a dan b!
   a. ${}^2\log 15$ d. ${}^2\log 5$
   b. ${}^4\log 75$ e. ${}^{30}\log 150$
   c. ${}^{25}\log 36$ f. ${}^{100}\log 50$
7. Jika $b = a^4$, a dan b bilangan real positif, $a \neq 1$, $b \neq 1$ tentukan nilai ${}^a\log b - {}^b\log a$!
8. Jika ${}^a\log b = 4$, ${}^c\log b = 4$ dan a, b, c bilangan positif, $a, c \neq 1$, tentukan nilai $\left[{}^a\log (bc)^4\right]^{\frac{1}{2}}$!
9. Buktikan log 1 = 0 dan log 10=1!
10. Buktikan bahwa untuk $a > b > 0$, ${}^a\log b < 0$ dan sebaliknya untuk $0 < a < b$, ${}^a\log b > 0$!
11. $\log^2 a$ adalah notasi untuk $(\log a)^2$. Berapakah nilai a yang memenuhi $2 \times \log^2 a + \log a = 6$?
12. Nyatakan p dalam q supaya berlaku ${}^p\log q - 6\ {}^q\log p = 1$!
13. ${}^2\log^2 a$ adalah notasi untuk $({}^2\log a)^2$. Jika a adalah bilangan bulat positif, maka berapakah nilai a yang memenuhi ${}^2\log^2 (a^2 - 3a) + {}^2\log (a^2 - 6a)^2 = 8$.
14. Untuk $a > 0$, $a \neq 1$, nyatakan b dalam a yang memenuhi persamaan ${}^a\log^2 (b^a + a) - {}^a\log (b^a + a)^3 + 2 = 0$
15. Pada awal tahun, Rony menabung uang di bank sebesar Rp125.000,00. Ia menyimpan uang tersebut selama

8 tahun. Berapa jumlah uang Rony pada akhir tahun ke delapan jika bank memberi suku bunga majemuk 6% setahun?

16. Pak Thomas menabung Rp.2.000.000,00 selama 5 tahun dengan bunga 12% per tahun. Jika perhitungan bunga tiga bulanan, berapakah besar bunga yang diterima Pak Thomas?

17. Tentukan skala *decibel* suara berikut.
    a. Percakapan normal yang memiliki intensitas $3,2 \times 10^{-6}$ Watt per meter kuadrat.
    b. Pesawat jet yang baru lepas landas yang memiliki intensitas $8,3 \times 10^{2}$ Watt per meter kuadrat.

18. Gemuruh suara Air terjun Niagara memiliki skala *decibel* 90. Tentukan intensitas bunyi dari air terjun tersebut. Apakah intensitas tersebut masih aman untuk telinga manusia?

SOAL TANTANGAN

19. Jika ${}^{4}\log a = p$ dan ${}^{8}\log b = q$ maka tentukanlah

$$\sqrt{a^5 \sqrt[3]{b \sqrt{a^5 \sqrt[3]{b \sqrt{a^5 \sqrt[3]{b \sqrt{\ldots}}}}}}}$$

dalam p dan q.

Projek

Skala logaritma dipergunakan untuk banyak keperluan selain menyatakan intensitas bunyi. Cari informasi tentang besaran lain yang menggunakan skala logaritma. Untuk membedakan analisis menggunakan logaritma bahkan digambarkan grafik dalam skala logaritma. Cari informasi ada berapa macam skala logaritma biasa dipergunakan dan beri contoh penelitian penggunaan skala logaritma. Buat laporan hasil pengamatan dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Berdasarkan sajian materi terkait berbagai konsep dan sifat eksponen dan logaritma di atas, beberapa hal penting dapat kita rangkum sebagai berikut.

1. Konsep eksponen dan logaritma dapat ditemukan kembali dari berbagai pemecahan masalah nyata di sekitar kehidupan kita.
2. Operasi eksponen adalah perluasan dari operasi perpangkatan yang sudah dipelajari di Sekolah Dasar dan SMP. Operasi perpangkatan pasti merupakan eksponen. Pada operasi perpangkatan, kita menggunakan bilangan bulat, tetapi pada eksponen tergantung variabel bilangan real sebagai eksponen dari basisnya. Misalnya $p^x = q$, x sebagai eksponen dari p, dimana x raional dan p bilangan real, tetapi $2^3 = 8$, 3 adalah sebuah bilangan pangkat dari 2.
3. Sifat-sifat perpangkatan dapat digunakan untuk menurunkan sifat-sifat penarikan akar.
4. Jika grafik fungsi eksponen dicerminkan terhadap sumbu $y = x$, maka diperoleh grafik fungsi logaritma.
5. Penguasaan berbagai konsep dan sifat-sifat eksponen dan logaritma adalah prasyarat untuk mempelajari fungsi eksponen dan fungsi logaritma. Secara mendalam, berbagai sifat-sifat dari fungsi eksponen dan logaritma serta penerapannya akan dibahas dipokok bahasan peminatan.

Pada Bahasan 2 (Bab 2), kita akan mempelajari persamaan dan pertidaksamaan linier yang melibatkan variabel berpangkat satu. Sama halnya dengan penemuan kembali konsep eksponen dan logaritma melalui pemecahan masalah nyata, akan kita temukan konsep dan sifat-sifat persamaan dan pertidaksamaan linier dari berbagai situasi nyata kehidupan disekitar kita. Penguasaan kamu pada materi eksponen dan logaritma akan berguna untuk mempelajari materi pada bab berikutnya. Perlu kami tekankan bahwa mempelajari materi matematika mulai bahasan 1 sampai 12, harus dipelajari secara terurut, jangan melompat-lompat, sebab sangat dimungkinkan penguasaan materi pada bahasan berikutnya didasari penguasaan materi pada bahasan sebelumnya.

Catatan:

Bab 2

Persamaan dan Pertidaksamaan Linear

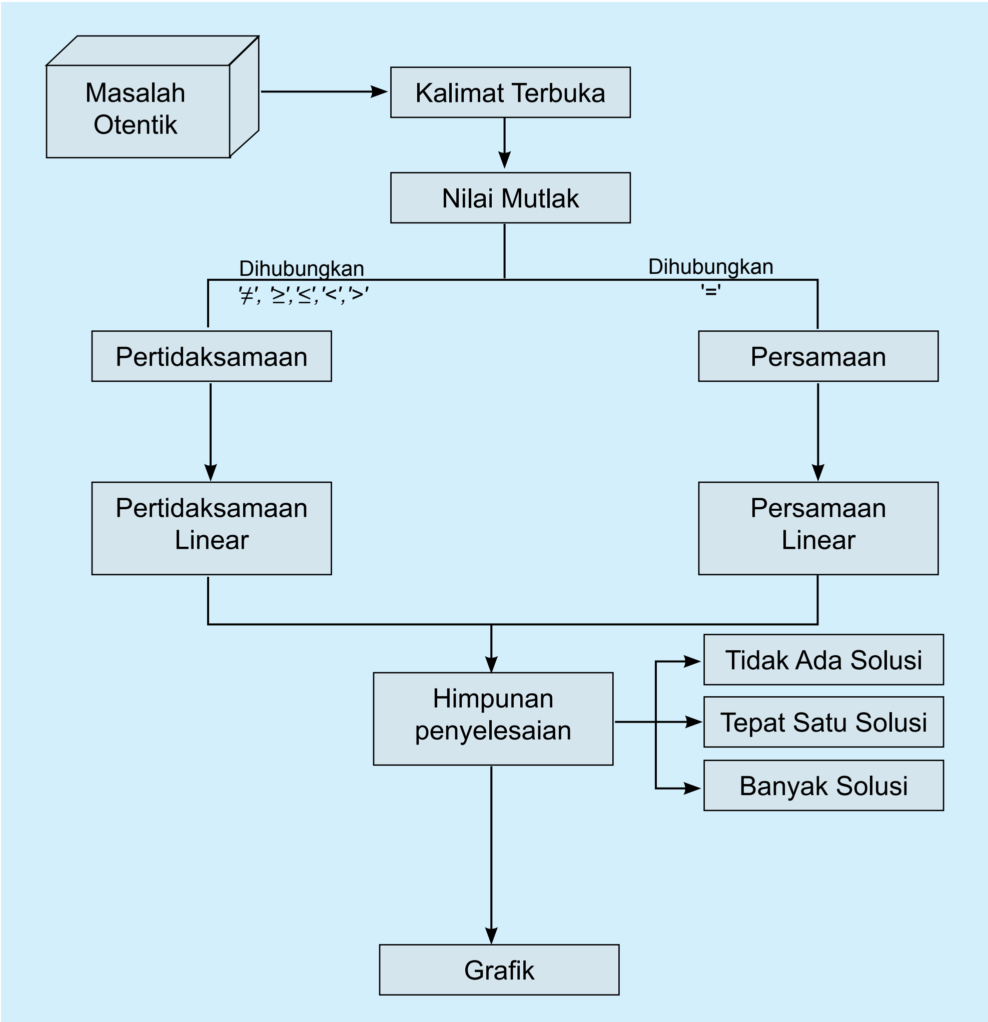
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran persamaan dan pertidaksamaan linear, siswa mampu: 1. Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya. 2. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah. 3. Mampu mentransformasi diri dalam berperilaku jujur, tangguh, menghadapi masalah, kritis, dan disiplin dalam melakukan tugas belajar matematika. 4. Mendeskripsikan dan menganalisis konsep nilai mutlak dalam persamaan dan pertidaksamaan serta menerapkannya dalam pemecahan masalah nyata. 5. Menerapkan konsep nilai mutlak dalam persamaan dan pertidaksamaan linier dalam memecahkan masalah nyata. 6. Membuat model matematika berupa persamaan dan pertidaksamaan linear dua variabel yang melibatkan nilai mutlak dari situasi nyata dan matematika, serta menentukan jawab dan menganalisis model sekaligus jawabnya.	Melalui pembelajaran materi persamaan dan pertidaksamaan linear, siswa memperoleh pengalaman belajar: • menghadapi permasalahan yang aktual terkait nilai – nilai mutlak • menghadapi permasalahan pada kasus persamaan dan pertidaksamaan linear di kehidupan sehari-hari. • berpikir kreatif dalam membangun konsep dan sifat permasalahan persamaan dan pertidaksamaan linear dan menerapkannya dalam kehidupan nyata • membangun model matematika permasalahan nyata terkait dengan persamaan dan pertidaksamaan linear nilai mutlak. • berpikir kritis dalam mengamati permasalahan. • mengajak untuk melakukan penelitian dasar dalam membangun konsep persamaan dan pertidaksamaan linear nilai mutlak dan menerapkannya dalam kehidupan sehari – hari. • mengajak kerjasama tim dalam menemukan solusi suatu permasalahan.

Istilah Penting

- *Persamaan linear*
- *Pertidaksamaan linear*
- *Lebih dari*
- *Kurang dari*
- *Nilai mutlak*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

Pada bab ini, kita akan mempelajari persamaan dan pertidaksamaan linear yang berkaitan dengan nilai mutlak. Kamu harus mengingat kembali pelajaran tentang persamaan linear dan pertidaksamaan linear yang telah kamu pelajari di kelas VIII. Jadi, pertama kali, kita akan mempelajari konsep nilai mutlak, persamaan linear, pertidaksamaan linear dan kemudian kita akan melibatkan nilai mutlak dalam persamaan dan pertidaksamaan linear tersebut. Nah, kamu perhatikan dan amati ilustrasi dan masalah berikut.

1. Memahami dan Menemukan Konsep Nilai Mutlak



Gambar 2.1 Anak Pramuka

Ilustrasi:

Kegiatan pramuka adalah salah satu kegiatan ekstrakurikuler yang diadakan di sebuah sekolah. Sebuah grup pramuka sedang belajar baris berbaris di lapangan sekolah pada hari Sabtu. Sebuah perintah dari pimpinan pasukan: "Maju 4 langkah, jalan!", hal ini berarti jarak pergerakan barisan adalah 4 langkah ke depan. Jika perintah pimpinan pasukan: "Mundur 3 langkah, jalan!", hal ini berarti bahwa pasukan akan bergerak melawan arah sejauh 3 langkah. Demikian seterusnya.

Besar pergerakan langkah pasukan tersebut merupakan nilai mutlak, tidak ditentukan arah. "Maju 4 langkah", berarti mutlak 4 langkah dari posisi diam dan "mundur 3 langkah, berarti mutlak 3 langkah dari posisi diam. Dalam hal ini, yang dilihat adalah nilainya, bukan arahnya. Lebih jelasnya, mari bersama-sama mempelajari kasus-kasus di bawah ini.

Masalah-2.1

Seorang anak bermain lompat-lompatan di lapangan. Dari posisi diam, si anak melompat ke depan 2 langkah, kemudian 3 langkah ke belakang, dilanjutkan 2 langkah ke depan, kemudian 1 langkah ke belakang, dan akhirnya 1 langkah lagi ke belakang.

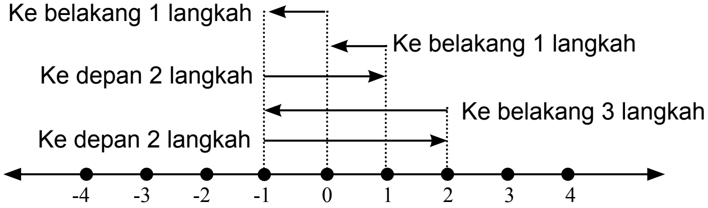
Permasalahan:

a. Dapatkah kamu membuat sketsa lompatan anak tersebut?
b. Tentukanlah berapa langkah posisi akhir anak tersebut dari posisi semula!
c. Tentukanlah berapa langkah yang dijalani anak tersebut!

Alternatif Penyelesaian

Kita mendefinisikan lompatan ke depan adalah searah dengan sumbu x positif, sebaliknya lompatan ke belakang adalah searah dengan sumbu x negatif.

Perhatikan sketsa berikut:



Gambar 2.2 Sketsa lompatan

Dari gambar di atas, kita misalkan bahwa $x = 0$ adalah posisi awal si anak. Anak panah yang pertama di atas garis bilangan menunjukkan langkah pertama si anak sejauh 2 langkah ke depan (mengarah ke sumbu x positif atau +2), anak panah kedua menunjukkan 3 langkah si anak ke belakang (mengarah ke sumbu x negatif atau -3) dari posisi akhir langkah pertama, demikianlah seterusnya sampai akhirnya si anak berhenti pada langkah ke 5.

Jadi, kita dapat melihat pergerakan akhir si anak dari posisi awal adalah 1 langkah saja ke belakang ($x = (+2) + (-3) + (+2) + (-1) + (-1) = -1$). Banyak langkah yang dijalani si anak merupakan konsep nilai mutlak, karena kita hanya menghitung banyak langkah, bukan arahnya. Banyak langkah selalu dinyatakan dengan bilangan bulat positif walaupun arahnya ke arah sumbu x negatif. Banyak langkah dapat dinyatakan dengan nilai mutlak dari sebuah bilangan bulat. Misalnya mundur 3 langkah dinyatakan dengan nilai mutlak negatif 3 (atau $|-3|$), sehingga banyak langkah anak tersebut adalah $|2| + |-3| + |2| + |-1| + |-1| = 9$ (9 langkah).

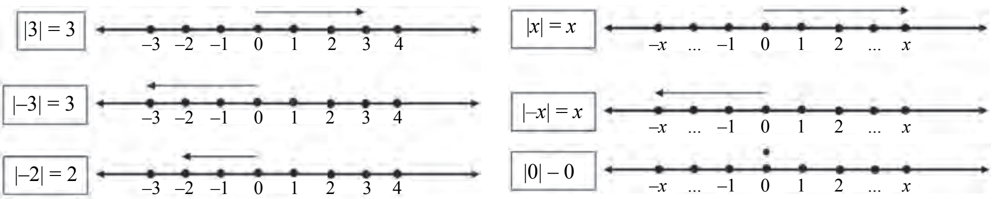
Perhatikan Tabel 2.1 berikut.

Tabel 2.1 Nilai Mutlak

Nilai	Nilai Mutlak
5	5
3	3
2	2
0	0
–2	2
–3	3
–4	4
–5	5

Dari ilustrasi dan tabel di atas, dapatkah kamu menarik sebuah kesimpulan tentang pengertian nilai? Jika x adalah variabel pengganti semua bilangan real, dapatkah kamu menentukan nilai mutlak x tersebut?
Perhatikan, x bilangan real, dituliskan dengan $x \in R$.

Dari contoh pada tabel tersebut, kita melihat bahwa nilai mutlak akan bernilai positif atau nol (nonnegatif). *Nilai mutlak adalah jarak antara bilangan itu dengan nol pada garis bilangan real*. Perhatikan garis bilangan berikut! Kita melakukan beberapa percobaan perpindahan posisi pada garis bilangan sebagai berikut.



Gambar 2.3 Selang Nilai Mutlak

Berdasarkan masalah – masalah di atas, dapat kita definisikan konsep nilai mutlak, sebagai berikut.

Definisi 2.1

Misalkan x bilangan real, nilai mutlak x, dituliskan $|x|$, didefinisikan

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

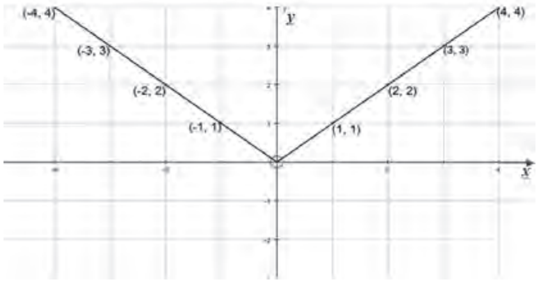
Berikut ini, kita akan mencoba menggambar grafik $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$.

Perhatikan beberapa titik yang mewakili grafik fungsi di atas.

Tabel 2.2 Beberapa Pasangan Koordinat Titik pada gafik $f(x) = |x|$

x	...	–4	–2	–1	0	1	2	4	...
$y = f(x)$	...	4	2	1	0	1	2	4	...
(x,y)	...	(–4,4)	(–2,2)	(–1,1)	(0,0)	(1,1)	(2,2)	(4,4)	...

Titik-titik yang kita peroleh pada tabel ini, disajikan dalam koordinat kartesius sebagai berikut.



Gambar 2.4: Grafik $y = f(x)=|x|$

Berdasarkan definisi dan gambar grafik di atas dapat kita simpulkan bahwa nilai $|x|$ pada dasarnya menyatakan besar simpangan dari titik $x = 0$.

Contoh 2.1

Gambarkan grafik $f(x) = |x-2|$ dengan memanfaatkan Definisi 2.1.

Alternatif Penyelesaian

Mari amati langkah– langkah berikut.

Langkah 1.

Buatlah tabel untuk menunjukkan pasangan beberapa titik yang mewakili grafik tersebut. Tentukan pertama kali nilai x yang membuat nilai fungsi tersebut nol. Tentu $x = 2$, bukan? Jadi, koordinat awal kita adalah (2,0)

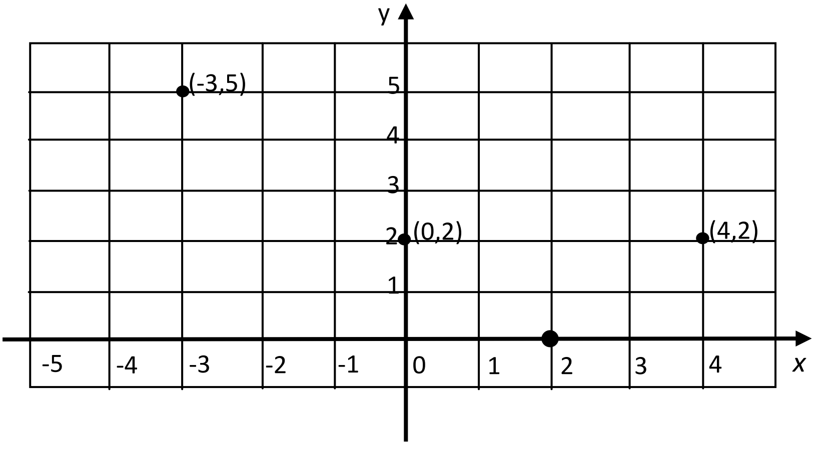
Tabel 2.3 Beberapa pasangan koordinat pada grafik $f(x) = |x-2|$

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	...	5	...	...	2	...	0	...	2	...
(x,y)	...	...	(-3,5)	...	...	(0,2)	...	(2,0)	...	(4,2)	...

Lengkapilah tabel di atas dan kamu akan menemukan beberapa koordinat titik yang memenuhi fungsi $f(x) = |x-2|$ tersebut!

Langkah 2.

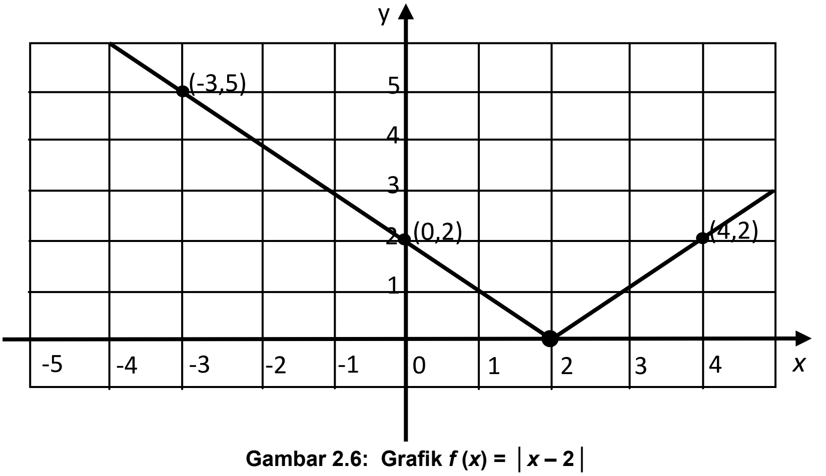
Letakkanlah titik – titik yang kamu peroleh pada tabel di atas koordinat kartesius.



Gambar 2.5: Titik pada kurva *f* (*x*) = | *x* – 2 |

***Langkah 3*.**

Buatlah garis lurus yang menghubungkan titik – titik yang sudah kamu letakkan di bidang koordinat tersebut sesuai dengan urutan nilai x. Kamu akan mendapat grafik seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.6: Grafik *f* (*x*) = | *x* – 2 |

Latihan 2.1

Perhatikan grafik $f(x) = |x - 2|$ pada Gambar 2.6.
Lihatlah penyimpangan grafik terhadap sumbu x. Dapatkah kamu tarik kesimpulan?
Bagaimana penyimpangan grafik $f(x) = |x - p|$ terhadap sumbu x, untuk p bilangan real?

Berikutnya, mari kita amati hubungan antara $|x|$ dengan $\sqrt{x^2}$? Mari kita lakukan percobaan sederhana dengan mengamati nilai kedua fungsi tersebut. Untuk memudahkan pengamatan, kita sajikan data – data pada tabel berikut.

Tabel 2.4 Hubungan |x| dan $\sqrt{x^2}$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$\|x\|$	3	2	1	0	1	2	3
$\sqrt{x^2}$	3	2	1	0	1	2	3

Apakah hasil pengamatanmu? Tentu saja, kamu dapat melihat bahwa nilai kedua fungsi sama, bukan? Dengan demikian, kamu mendapatkan hubungan kedua fungsi : yaitu $|x| = \sqrt{x^2}$.

Latihan 2.2

Dari definisi nilai mutlak yang kita pelajari, dapatkah kamu berikan definisi fungsi nilai mutlak berikut.

$$|ax + b| = \begin{cases} \ldots & \text{jika } \ldots \geq \ldots \\ \ldots & \text{jika } \ldots < \ldots \end{cases}$$

Coba diskusikan dengan temanmu!

2. Persamaan Linear

Masalah-2.2

Andi dalam tiga hari berturut-turut membelanjakan uangnya untuk membeli keperluan sekolah. Pada hari Minggu dia menghabiskan $\frac{1}{2}$ dari uang yang dimilikinya. Pada hari Senin, dia membelanjakan uangnya Rp4.000,00 lebih sedikit dari uang yang dia belanjakan hari Minggu. Sementara uang yang dibelanjakan pada hari Selasa hanya $\frac{1}{3}$ dari belanja hari Senin. Sekarang dia masih memiliki uang sisa belanja sebanyak Rp1.000,00.

Dapatkah kamu membuat model dari permasalahan tersebut? Buatlah model matematika dari masalah tersebut! Tentukan uang Andi sebelum dibelanjakan?

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

Belanja hari Minggu = $\frac{1}{2} \times$ jumlah uangnya.

Belanja hari Senin = Rp4.000,00 lebih sedikit dari belanja hari Minggu.

Belanja hari Selasa = $\frac{1}{3} \times$ belanja hari Senin.

Sisa uang belanja = Rp 1.000,00

Ditanya:
- Buatlah model matematika dari permasalahan di atas.
- Tentukan banyak uang Andi sebelum dibelanjakan.

Marilah kita bersama-sama menyelesaikan permasalahan ini.
Misalkan banyak uang Andi sebelum dibelanjakan = x rupiah
Dari yang diketahui diperoleh

Belanja hari Minggu = $\frac{1}{2}x$

Belanja hari Senin = $\frac{1}{2}x - 4000$

Belanja hari Selasa = $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - 4.000\right)$

Kita buat sebuah persamaan dari kasus ini, yaitu:
Uang Andi = jumlah uang yang dibelanjakan + sisa uang uang belanja
sehingga penyelesaian permasalahan ini, adalah:

$$x = \left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2} - 4.000\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - 4.000\right) + 1.000 \text{ ....(1)}$$

Jika persamaan (1) diselesaikan maka

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} - 4.000 + \frac{x}{6} - \frac{4.000}{3} + 1.000$$

$$6x = 3x + 3x - 24.000 + x - 8.000 + 6.000$$
$$6x = 7x - 26.000$$
$$x = 26.000$$

Dengan demikian uang Andi mula-mula adalah Rp26.000,00.

Masalah-2.3

Di sebuah desa, terdapat sepasang manula yang tinggal di rumah tua. Pada saat sensus penduduk awal tahun 2013, kakek dan nenek tersebut belum memiliki KTP. Untuk pembuatan KTP, kakek dan nenek tersebut diminta data tanggal lahir mereka, tetapi mereka tidak pernah mengetahui tahun lahir mereka. Mereka hanya mengingat bahwa saat menikah, selisih umur mereka 3 tahun. Saat itu nenek berusia 20 tahun, yaitu 11 tahun setelah proklamasi.
Dapatkah kamu membuat persamaan linear dari persoalan di atas? Dapatkah kita ketahui tahun lahir mereka?

Alternatif Penyelesaian

Misalkan: Umur kakek = K tahun Umur nenek = N tahun
Tahun lahir kakek = TK Tahun lahir nenek = TN

Pemodelan

Selisih umur kakek dan nenek adalah 3 tahun sehingga $K - N = 3$

Nenek berusia 20 tahun, yaitu 11 tahun sesudah proklamasi 1945. Jika sekarang awal tahun 2013 maka usia nenek adalah:
$N = (20 - 11) + (2013 - 1945)$ atau $N = 77$ sehingga dengan $K - N = 3$ diperoleh $K = 80$.
Selanjutnya kita mendapatkan dugaan tahun lahir mereka dengan:

Tahun lahir + Usia = Tahun sekarang

sehingga dugaan tahun lahir mereka adalah:

$TN + 77 = 2013$ dan $TK + 80 = 2013$..(2)
Bila persamaan (2) diselesaikan maka $TN = 1936$ dan $TK = 1933$
Dengan demikian, tahun lahir nenek dan kakek adalah 1936 dan 1933.

Masalah-2.4

Umur ayah 4 tahun yang lalu adalah 2/3 kali umur ayah pada *c* tahun yang akan datang, (*c* adalah bilangan bulat positif). Sekarang, umur ayah adalah 27 tahun lebihnya dari 1/5 umurnya pada 7 tahun yang lalu.
Apakah kamu dapat menentukan umur ayah saat ini? Tentukanlah nilai *c* pada kasus tersebut!

Alternatif Penyelesaian

1. Misalkan umur ayah sekarang adalah x tahun.
2. Berdasarkan informasi masalah di atas, dapat dituliskan

   Umur ayah 4 tahun yang lalu adalah 2/3 kali umur ayah pada c tahun yang akan datang, atau $x - 4 = \frac{2}{3}(x + c)$ ....(3)
3. Umur ayah sekarang 27 tahun lebihnya dari 1/5 kali umurnya pada 7 tahun yang lalu atau $x = \frac{1}{5}(x - 7) + 27$ ....(4)
4. Model yang telah diperoleh, kita selesaikan sebagai berikut:

$$x - 4 = \frac{2}{3}(x + c) \quad \Leftrightarrow \quad x = 2c + 12$$

$$x = \frac{1}{5}(x - 7) + 27 \quad \Leftrightarrow \quad 4x - 128 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 32$$

Subsitusikan $x = 32$ ke $x = 2c + 12$ diperoleh $32 = 2c + 12$ atau $c = 10$.
Jadi, umur ayah saat ini adalah 32 tahun.

Diskusi

Coba kamu teliti kasus berikut. Berikan jawaban atau komentarmu, apakah kasus berikut logis?
Umur Ayah 5 tahun yang lalu adalah 2/3 kali umurnya pada *c* tahun yang akan datang. Sekarang, umur ayah adalah 6 tahun lebihnya dari 1/2 kali umurnya 7 tahun yang lalu. Coba kamu analisis nilai c yang kamu peroleh.

Ketiga permasalahan di atas menjadi dasar ide tentang bentuk persamaan linear satu variabel dan dua variabel. Perhatikan persamaan (1), (2), (3), dan (4). Keempat persamaan tersebut disebut persamaan linear. Secara induktif, bentuk umum persamaan linear satu variabel dan dua variabel adalah sebagai berikut.

Definisi 2.2

Persamaan linear satu variabel adalah persamaan berbentuk $ax + b = 0$ dengan $a, b \in R$ dan $a \neq 0$, dan
x : variabel real
a : koefisien x
b : konstanta

Definisi 2.3

Persamaan linear dua variabel adalah persamaan berbentuk $ax + by + c = 0$ dengan $a, b, c \in R$, a dan b tidak keduanya nol, dimana
x,y: variabel real
a : koefisien x
b : koefisien y
c : konstanta

Sifat-2.1

Misal l adalah persamaan linear, maka:

a. Penambahan dan pengurangan bilangan di kedua ruas persamaan l, tidak mengubah solusi persamaan tersebut.
b. Perkalian bilangan tidak nol di kedua ruas pada persamaan l, tidak mengubah solusi persamaan tersebut.

Contoh 2.2

Jika $x \geq 0$, tentukan pasangan titik (x, y) yang memenuhi persamaan linear $x - 4y = 12$, untuk $x, y \in R$, kemudian gambarkan grafiknya!

Alernatif Penyelesaian

Pertama-tama kita tentukan nilai x dan y yang memenuhi persamaan $x - 4y = 12$ dan kita buat pada tabel berikut.

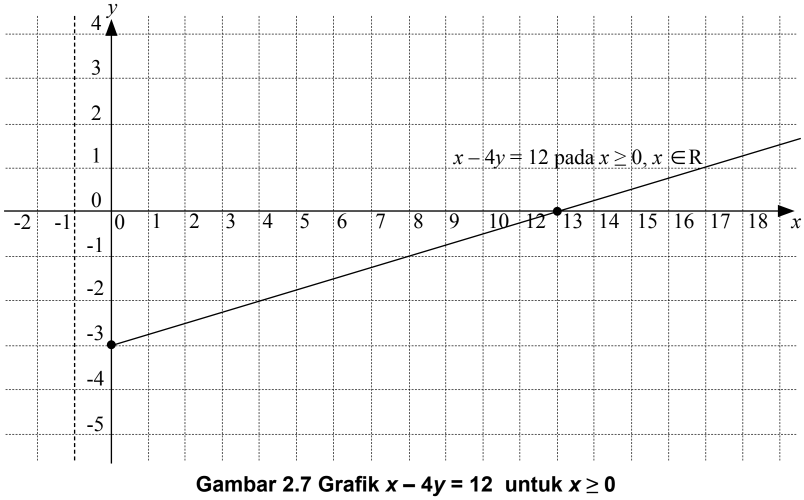
Tabel 2.5 Pasangan titik (x,y) pada grafik $x - 4y = 12$ untuk $x \geq 0$

x	0	1	2	3	...	...	...
y	–3	-11/4	-10/4	-9/4	...	...	...
(x,y)	(0,–3)	(1,-11/4)	(2,-10/4)	(3,-9/4)	...	...	...

Dari data Tabel 2.5 dapat dinyatakan bahwa terdapat tak hingga banyaknya pasangan titik (x, y) yang memenuhi persamaan $x - 4y = 12$, yaitu:

$$\text{HP} = \{(0,-3),(1,-\frac{11}{4}),(2,-\frac{10}{4}),(3,-\frac{9}{4}),(4,-\frac{9}{4}),...\}$$

Grafik $x - 4y = 12$ ini memotong sumbu x di titik (12, 0) dan memotong sumbu y di titik (0, -3). Selanjutnya dengan menggunakan titik pada tabel di atas, kita dapat menggambarkan grafik $x - 4y = 12$ untuk $x \geq 0$ pada bidang koordinat.



Gambar 2.7 Grafik $x - 4y = 12$ untuk $x \geq 0$

Contoh 2.3

Diberikan persamaan linear $y = 3x - 4$, untuk setiap $x \in R$. Gambarlah grafik persamaan linear tersebut!

Alernatif Penyelesaian

Pertama-tama kita tentukan nilai x dan y yang memenuhi persamaan $y = 3x - 4$ dan kita buat tabel berikut.

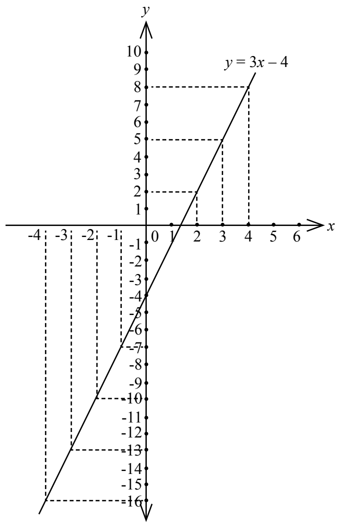
Tabel 2.6 Pasangan titik (*x*,*y*) untuk grafik *y* = 3*x* – 4 untuk $x \in R$

x	...	–4	–3	–2	–1	0	$\frac{4}{3}$	...
y	...	–16	–13	–10	–7	–4	0	...
(x, y)	...	(–4, –16)	(–3,–13)	(–2, –10)	(–1, –7)	(0, –4)	$\left(\frac{4}{3},0\right)$	...

Dari data Tabel 2.6 dapat dinyatakan bahwa terdapat tak hingga pasangan (x, y) yang memenuhi persamaan $y = 3x - 4$ adalah tak hingga banyaknya, yaitu

$HP = \{..., (-4,-16),(-3,-13),(-2,-10),(-1,-7),(0,-4),(\frac{4}{3},0)\ ....\}$.

Dari data pasangan titik sebagai anggota himpunan penyelesaian, dapat dikatakan bahwa grafik $y = 3x - 4$ memotong sumbu x pada titik $(\frac{4}{3},0)$ dan memotong sumbu y pada titik $(0, -4)$. Selanjutnya kita gambarkan grafik $y = 3x - 4$ pada bidang koordinat kartesius dengan menggunakan pasangan (x, y) tersebut.



Gambar 2.8 Grafik $y = 3x - 4$

Definisi 2.4

Misalkan *a*, *b*, dan *c* bilangan real dan *a*, *b* keduanya tidak nol.

Himpunan penyelesaian persamaan linear $ax + by = c$ adalah himpunan semua pasangan (x, y) yang memenuhi persamaan linear tersebut.

Diskusi

Berdasarkan Definisi 2.4, diskusikanlah dengan temanmu satu kelompok untuk menjawab beberapa pertanyaan berikut.

1. Dapatkah sebuah persamaan linear dua variabel memiliki anggota himpunan penyelesaian adalah tepat satu atau penyelesaian tunggal? Jika dapat, berikan contoh persamaanya!
2. Dapatkah sebuah persamaan linear dua variabel tidak memiliki anggota himpunan penyelesaian? Jika dapat, beri contoh persamaannya!

3. Pertidaksamaan Linier

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak kita jumpai kasus yang melibatkan pembatasan suatu hal. Contohnya, lowongan kerja mensyaratkan pelamar dengan

batas usia tertentu, batas nilai cukup seorang pelajar agar dinyatakan lulus dari ujian, dan batas berat bersih suatu kendaraan yang diperbolehkan oleh dinas angkutan umum. Perhatikan masalah berikut!

Masalah-2.5

Ayah Budi lebih muda dibanding pamannya tetapi lebih tua dari ibunya. Sementara umur bibinya hanya satu tahun lebih tua dari umur ibunya tetapi satu tahun lebih muda dari umur ayahnya.
Budi berencana mengurutkan umur antara ayah, ibu, paman, dan bibinya berdasarkan umur mereka yang lebih tua.
Dapatkah kamu membantu Budi dalam mengatasi permasalahan tersebut?

Pertama sekali didefinisikan variabel-variabelnya sebagai berikut:

Umur ayah = A tahun   Umur ibu = I tahun
Umur paman = P tahun   Umur bibi = B tahun

Dari penjelasan permasalahan di atas, diperoleh informasi sebagai berikut.

a. Ayah lebih muda dibanding paman
   $A < P$ atau $A - P < 0$ ....(5)
b. Ayah lebih tua dari ibu
   $A > I$ atau $I < A$..(6)
c. Umur bibi hanya satu tahun lebih tua dari umur ibu
   $B - 1 = I$ atau $B > I$ ....(7)
d. Umur bibi satu tahun lebih muda dari ayah
   $B + 1 = A$ atau $B < A$ ....(8)

Dengan mengamati pola di atas, yaitu $A < P$, $I < A$, $I < B$, dan $B < A$.

Urutan umur mereka mulai dari tertua ke termuda adalah $P > A > B > I$.

Jadi, kesimpulannya adalah paman lebih tua dibanding ayah, ayah lebih tua dibanding bibi, dan bibi lebih tua dibanding ibu.

Diskusi

Diskusikan masalah urutan berikut dengan menggunakan metodemu sendiri!
Pak Anto, Pak Yusuf, dan Pak Doni gemar memancing. Mereka selalu memancing ikan di sungai setiap Sabtu. Suatu hari, setelah mereka selesai memancing, mereka menghitung banyak ikan mereka masing-masing. Banyak ikan yang ditangkap Pak Anto ternyata lebih daripada banyak ikan yang ditangkap Pak Yusuf. Walaupun banyak ikan yang ditangkap Pak Anto dikali dua, juga masih lebih sedikit dibanding dengan tangkapan Pak Yusuf dan Pak Doni. Berdasarkan cerita di atas, dapatkah kamu menentukan urutan mereka berdasarkan banyak ikan yang mereka tangkap?

Masalah-2.6

Santi berbelanja di toko peralatan sekolah dengan uang yang tersedia Rp250.000,00. Harga setiap barang di toko tersebut telah tersedia di daftar harga barang sehingga Santi dapat memperkirakan peralatan sekolah apa saja yang sanggup dia beli dengan uang yang dia miliki. Berdasarkan daftar harga, jika Santi membeli 2 seragam sekolah dan 3 buku maka dia masih mendapatkan uang kembalian. Dapatkah kamu memodelkan harga belanjaan Santi tersebut?

Dengan memisalkan harga seragam sekolah = x rupiah dan harga buku = y rupiah maka permasalahan di atas dapat dimodelkan sebagai berikut:

Santi membeli 2 seragam sekolah dan 3 buku dan mendapatkan uang kembalian mempunyai arti $2x + 3y < 250.000$ ....(9)

Dari masalah di atas, pertidaksamaan (5), (6), (7) , (8) dan (9) disebut pertidaksamaan linear. Berikut definisi pertidaksamaan linear.

Definisi 2.5

Pertidaksamaan linear satu variabel adalah persamaan yang berbentuk

$ax + b < 0$	dengan	a : koefisien x, $a \neq 0$, $a \in R$
$ax + b \leq 0$		b : konstanta ($b \in R$)
$ax + b > 0$		x : variabel real
$ax + b \geq 0$		

Definisi 2.6

Pertidaksamaan linear dua variabel adalah persamaan yang berbentuk

$ax + by + c < 0$ dengan a,b : koefisien ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $a, b \in R$)

$ax + by + c \leq 0$ c : konstanta ($c \in R$)

$ax + by + c > 0$ x,y : variabel real

$ax + by + c \geq 0$

Sifat-2.2

Misal k adalah pertidaksamaan linear, maka:

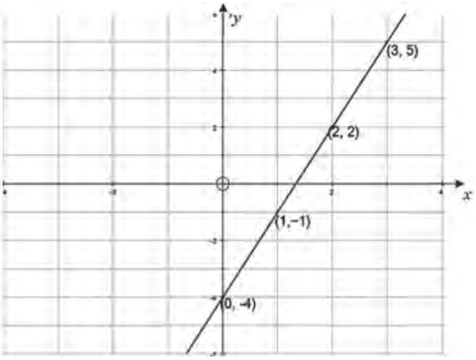
a. Penambahan dan pengurangan bilangan di kedua ruas pertidaksamaan k, tidak mengubah solusi persamaan tersebut.

b. Perkalian bilangan tidak nol di kedua ruas pada pertidaksamaan k, tidak mengubah solusi persamaan tersebut.

Uji Kompetensi 2.1

1. Salah satu penyakit sosial remaja sekarang ini adalah merokok. Ahli kesehatan merilis informasi bahwa, menghisap satu batang rokok akan mengurangi waktu hidup seseorang selama 5,5 menit. Seorang remaja mulai merokok 1 (satu) batang rokok perhari sejak umur 15 tahun. Berapa waktu hidup remaja tersebut berkurang sampai dia berumur 40 tahun?

2. Perhatikan grafik di bawah ini!



Dari pasangan titik-titik yang diberikan, tentukanlah persamaan linear yang memenuhi pasangan titik-titik tersebut.

3. Tentukanlah himpunan penyelesaian untuk setiap persamaan linear berikut ini!

   a. $5x - 3y = 7$

   b. $\frac{2}{3}y - 4x - 1 = 0$

   c. $y = \frac{1}{3} - 5x$

4. Untuk dapat diterima sebagai suster di RS.SEHAT, seorang calon suster akan menjalani tes sebanyak 4 kali, yaitu tes tertulis, psikotes, tes ketrampilan, dan wawancara dengan perbandingan hasil tes berturut-turut adalah 4 : 3 : 2 : 1. Total nilai tes tidak boleh kurang dari 793. Windy adalah seorang calon suster yang telah mengikuti tes dengan hasil sebagai berikut:
   Tes Tertulis= 75, Psikotes =78, dan Tes Wawancara=85. Tentukan nilai terendah Tes Keterampilannya agar ia dapat diterima di rumah sakit tersebut.

5. Berat astronot dan pesawatnya ketika mendarat di bulan tidak boleh melebihi 200 kg. Berat pesawat di bumi 900 kg dan berat benda di bulan 1/6 dari berat benda di bumi. Tentukan berat maksimum astronot di bumi!

6. Seorang penderita diabetes sedang mengontrol berat badannya. Ia menggunakan indeks berat badannya dengan rumus $I = W/h^2$, dengan W adalah berat badan (kg), dan h adalah tinggi badan (meter). Nilai I yang dimiliki setiap orang memiliki arti sebagai berikut.
   - $I < 25$ berarti berat badan normal
   - $25 < I \leq 30$ berarti kelebihan berat badan
   - $30 < I \leq 35$ berarti obesitas ringan
   - $35 < I \leq 40$ berarti obesitas sedang
   - $I \geq 40$ berarti obesitas kronis

   a. Jika tinggi badan orang tersebut 175 cm, berapa berat badan maksimal supaya tergolong berat badan normal?

   b. Jika orang tersebut sudah memiliki berat badan 80 kg dan yang akan dikontrol adalah tinggi badan dengan melakukan suatu terapi tertentu, tentukan batas tinggi badan agar digolongkan dalam katagori kelebihan berat badan.

7. Gambarkanlah grafik $g(x) = |2x-1|$ untuk $1 < x < 10$!

Projek

Perhatikan bahwa persamaan linear dua variabel dapat dibuat grafiknya asal diketahui dua titik yang dilaluinya. Persamaan linear dua variabel memiliki dua koefisien dan satu konstanta. Selidiki apa implikasi dari kenyataan ini. Selidiki apakah hanya ada satu persamaan linear dua variabel yang melalui dua titik yang sama. Apakah ini berarti ada beberapa persamaan linear dua variabel berbeda yang melalui dua titik yang sama. Ataukah walaupun banyak, semua persamaan linear dua variabel melalui dua titik yang sama sebenarnya adalah sama. Buat laporan hasil kegiatanmu dan paparkan di depan kelas.

4. Persamaan Linear Yang Melibatkan Nilai Mutlak

Kita telah memahami lewat pengamatan terhadap beberapa kasus pada nilai mutlak dan persamaan linear satu atau dua variabel. Selanjutnya kita akan mempelajari persamaan linear nilai mutlak. Kamu diharapkan mampu memahami aplikasi kedua konsep tersebut. Perhatikan dan pahami masalah berikut.

Masalah-2.7

Sungai Bengawan Solo sering meluap pada musim hujan dan kering di musim kemarau. Debit air sungai tersebut adalah *p* liter/detik pada cuaca normal. Perubahan debit pada cuaca tidak normal adalah sebesar q liter/detik.

Tunjukkanlah sketsa penurunan minimum dan peningkatan maksimum debit air sungai tersebut!



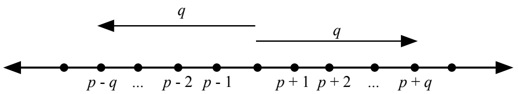
Gambar 2.9 Sungai

Alternatif Penyelesaian

Kamu telah mengetahui penyimpangan suatu nilai tertentu dapat dinyatakan dengan nilai mutlak. Nilai mutlak peningkatan dan penurunan debit air tersebut dengan perubahan sebanyak q liter/detik dapat dimodelkan dengan persamaan:

$|x - p| = q$ dimana, x: debit air sungai.

Dengan pemahaman yang telah kita miliki, kita dapat menggambarkan grafiknya sebagai berikut.



Misalkan debit air sungai = x liter/detik

Simpangan x terhadap nilai pada cuaca normal adalah $|x - p|$. Jika perubahan debit air tersebut bernilai q maka $|x - p| = q$, sehingga diperoleh $x = p + q$ atau $x = p - q$. Dari grafik di atas, tampak jelas bahwa penurunan minimum debit air adalah $(p - q)$ liter/detik dan peningkatan maksimum debit air adalah $(p + q)$ liter/detik.

Contoh 2.4

Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan $|x-3|+|2x-8|=5$.

Alternatif Penyelesaian

Dengan menggunakan Definisi 2.1 maka diperoleh,

$$|x-3|=\begin{cases} x-3 & jika \quad x\geq 3 \\ -x+3 & jika \quad x<3 \end{cases} \text{ dan } |2x-8|=\begin{cases} 2x-8 & jika \quad x\geq 4 \\ -2x+8 & jika \quad x<4 \end{cases} \text{ sehingga}$$

a. Untuk $x < 3$ maka $-x + 3 - 2x + 8 = 5$ $\Leftrightarrow -3x + 11 = 5$
$\Leftrightarrow -3x = -6$
$\Leftrightarrow x = 2$
(memenuhi karena $x = 2$ berada pada domain $x < 3$)

b. Untuk $3 \leq x < 4$ maka $x - 3 - 2x + 8 = 5$ $\Leftrightarrow -x + 5 = 5$
$\Leftrightarrow -x = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$
(tidak memenuhi karena $x = 0$ tidak berada pada domain $3 \leq x < 4$)

c. Untuk $x \geq 4$ maka $x - 3 + 2x - 8 = 5$ $\Leftrightarrow 3x - 11 = 5$
$\Leftrightarrow 3x = 16$
$\Leftrightarrow x = 16/3$
(memenuhi karena $x = 16/3$ berada pada domain $x \geq 4$)

Jadi, penyelesaian $|x-3|+|2x-8|=5$ adalah HP = {(2,16/3)}

5. Pertidaksamaan Linear Yang Melibatkan Nilai Mutlak

Selanjutnya kita akan mengaplikasikan konsep nilai mutlak ke pertidaksamaan linier, dengan memahami dan meneliti kasus-kasus berikut.

Masalah-2.8



Gambar 2.10 Inkubator

Seorang bayi lahir prematur di sebuah Rumah Sakit Ibu dan Anak dengan berat badan 2.200 gram. Untuk mengatur suhu tubuh bayi tetap stabil, maka harus dirawat di dalam inkubator selama beberapa hari. Suhu inkubator harus dipertahankan berkisar antara 32°C hingga 35°C selama 2 hari. Ternyata jika berat badan berada pada interval BB: 2.100–2.500 gram, maka suhu inkubator yang harus dipertahankan adalah 34°C. Jika pengaruh suhu ruangan membuat suhu inkubator menyimpang sebesar 0.2°C maka hitunglah interval perubahan suhu inkubator!

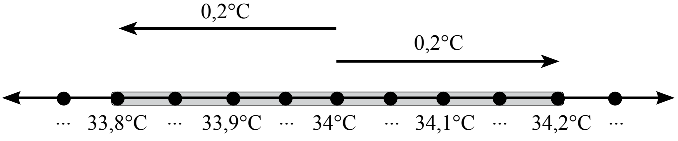
Alternatif Penyelesaian

Pada kasus bayi ini, kita sudah mendapatkan data dan suhu inkubator yang harus dipertahankan selama 1–2 hari sejak kelahiran adalah 34°C. Misalkan T adalah segala kemungkinan perubahan suhu inkubator akibat pengaruh suhu ruangan, dengan perubahan yang diharapkan sebesar 0.2°C, maka nilai mutlak suhu tersebut dapat kita modelkan, sebagai berikut:

$$|T - 34^\circ C| \leq 0{,}2^\circ C$$

Kasus ini dapat kita selesaikan melalui cara berikut.

Cara I. (Dengan mengamati sketsa)



Gambar 2.11 Interval perubahan suhu

sehingga interval kenaikan suhu inkubator adalah interval $\{T \mid 33{,}8^\circ C \leq T \leq 34{,}2^\circ C\}$.

Cara II. (Dengan memanfaatkan Definisi 2.1)

Bagian ini diserahkan kepada siswa. Kamu tentu dapat menyelesaikannya dengan bantuan petunjuk berikut.

1. Pelajari kembali Definisi 2.1, kemudian ubahlah bentuk $|T - 34^\circ C|$ yaitu:

$$|T - 34^0 C| = \begin{cases} \ldots & \text{jika} \quad \ldots \geq \ldots \\ \ldots & \text{jika} \quad \ldots < \ldots \end{cases}$$

2. Kamu telah mempartisi bentuk nilai mutlak tersebut pada langkah 1, dengan demikian kamu harus menyelesaikan pertidaksamaan pada masing - masing partisi tersebut. Ingat, hasil yang kamu dapatkan harus diiriskan kembali pada domainnya (daerah asal) masing – masing sehingga kamu memiliki dua interval jawaban.
3. Gabungkan jawaban yang kamu peroleh pada langkah 2. (Kamu diskusikan dengan temanmu, kenapa jawaban digabungkan? Kenapa jawaban tidak diiriskan?

Cara III (dengan memanfaatkan $|x| = \sqrt{x^2}$)
Kamu dapat lihat pada Contoh 2.6

Masalah-2.9


Gambar 2.12 Tentara menembak

Beberapa tentara melakukan latihan menembak di sebuah daerah kosong warga sipil. Salah satu dari mereka berencana menembak obyek yang telah ditentukan di sebuah perbukitan. Jika $x = 0$ adalah posisi awal tentara tersebut, maka pola lintasan peluru yang mengarah ke objek diperkirakan memenuhi persamaan $2y - x - 0{,}66 = 0$ dengan x adalah jarak penembak dengan sasaran dan y adalah ketinggian peluru dari permukaan tanah. Kecepatan angin dan hentakan senjata akan mempengaruhi pergerakan peluru sehingga kemungkinan lintasan peluru dapat berubah menjadi y – 0,475x – 0,35 = 0. Pada jarak berapakah lintasan peluru akan menyimpang 0,05 m oleh pengaruh-pengaruh perubahan arah tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Cara I (Dengan memanfaatkan Definisi 2.1)

Karena $x = 0$ adalah posisi awal peluru, maka lintasan peluru haruslah pada interval $x \geq 0$ sehingga model yang diperoleh adalah $|(0{,}5x + 0{,}33) - (0{,}475x + 0{,}35)| \leq 0.05$ atau $|0{,}025x - 0{,}02| \leq 0.05$. Dengan Definisi 2.1 maka

$$|0{,}025x - 0{,}02| = \begin{cases} 0{,}025x - 0{,}02 & \text{jika } x \geq 0{,}8 \\ -0{,}025x + 0{,}02 & \text{jika } 0 \leq x < 0{,}8 \end{cases}$$

sehingga

$$|0,025x - 0,02| \le 0,05 \Leftrightarrow \begin{cases} 0,025x - 0,02 \le 0,05 & \text{jika } x \ge 0,8 \\ -0,025x + 0,02 \le 0,05 & \text{jika } 0 \le x < 0,8 \end{cases}$$

Dengan menyelesaikan kedua pertidaksamaan maka:

a. Untuk $x \ge 0,8$ maka $0,025x - 0,02 \le 0.05$ atau $x \le 2,8$

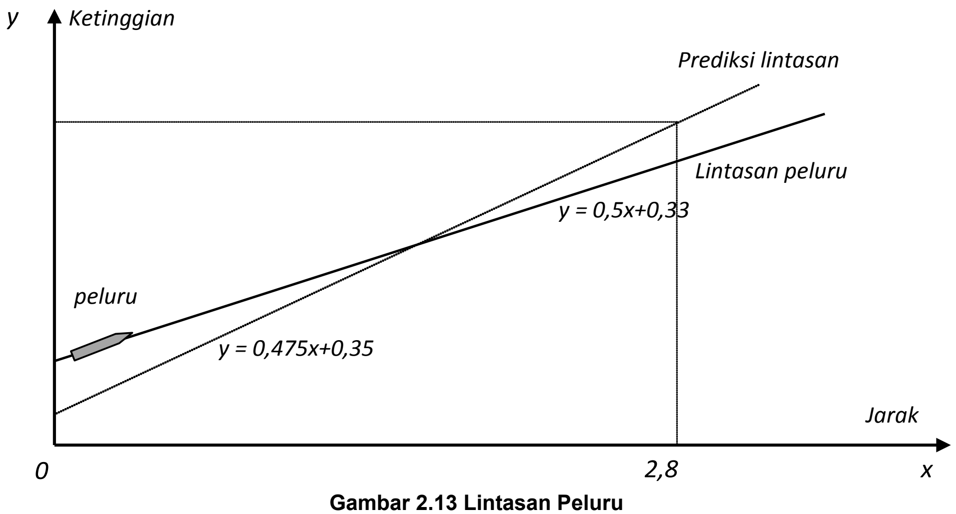
   Dengan mengiris $x \ge 0,8$ dan $x \le 2,8$ maka solusi 1 yang diperoleh adalah $0,8 \le x \le 2,8$.

b. Untuk $0 \le x < 0,8$ maka $-0,025x + 0,02 \le 0.05$ atau $x \ge -1,2$

   Dengan mengiris $0 \le x < 0,8$ dan $x \ge -1,2$ maka solusi 2 yang diperoleh adalah $0 \le x < 0,8$.

Jika jawaban (a) dan (b) digabung maka penyelesaian yang diperoleh adalah $0 \le x \le 2,8$. Artinya penyimpangan lintasan peluru akibat pengaruh kecepatan angin dan hentakan senjata sebesar 0,05 m terjadi sejauh 2,8 m dari posisi awal.

Permasalah di atas dapat dinyatakan dengan grafik sebagai berikut.



Gambar 2.13 Lintasan Peluru

Dari Gambar 2.13, jelas kita lihat bahwa grafik lintasan peluru yang diprediksi mengalami penyimpangan. Penyimpangan sejauh 0,05 m akan terjadi sampai $x = 2,8$ m.

Secara umum, pertidaksamaan linear nilai mutlak dapat disajikan dalam bentuk:

$$|x| \leq a \text{ untuk } a \geq 0,\ a \in R$$

$$|x| \geq a \text{ untuk } a \geq 0,\ a \in R.$$

Ingat pada pelajaran sebelumnya bahwa fungsi nilai mutlak tidak pernah bernilai negatif. Jika demikian, menurut pendapatmu, apa yang akan terjadi dalam bentuk umum di atas jika $a < 0$?

Berikutnya, mari kita temukan penyelesaian pertidaksamaan linear nilai mutlak $|x| \leq a$ dan $|x| \geq a$ untuk $a \geq 0$, $a \in R$.

***Kasus 1*.**

$|x| \leq a$ untuk $a \geq 0$, $a \in R$

Dengan menggunakan Definisi 2.1 maka:

Untuk $x \geq 0$ maka $|x| = x$ sehingga $x \leq a$.

untuk $x < 0$ maka $|x| = -x$ sehingga $-x \leq a$ atau $x \geq -a$.

Dengan demikian, solusi pertidaksamaan $|x| \leq a$ untuk $a \geq 0$, $a \in R$ adalah $x \leq a$ dan $x \geq -a$ (atau sering dituliskan dengan $-a \leq x \leq a$).

Kasus 2

$|x| \geq a$ untuk $a \geq 0$, $a \in R$

Dengan menggunakan Definisi 2.1 maka:

Untuk $x \geq 0$ maka $|x| = x$ sehingga $x \geq a$

Untuk $x < 0$ maka $|x| = -x$ sehingga $-x \geq a$ atau $x \leq -a$

Dengan demikian, solusi pertidaksamaan $|x| \geq a$ untuk $a \geq 0$, $a \in R$ adalah $x \leq -a$ atau $x \geq a$.

Diskusi

Diskusikan dengan teman – temanmu, apa yang menjadi penyelesaian umum pertidaksamaan linear nilai mutlak dengan bentuk umum:

$|ax + b| \leq c$ untuk $c \geq 0$, a, b, $c, \in \mathrm{R}$

$|ax + b| \geq c$ untuk $c \geq 0$, a, b, $c, \in \mathrm{R}$

$|ax + b| \leq |cx + d|$ untuk a, b, $c, \in \mathrm{R}$

Kasus 1 dan kasus 2 dapat juga diselesaikan dengan memanfaatkan sifat $|x| = \sqrt{x^2}$ (lihat kembali Latihan 2.1). Tentu saja, kita membutuhkan konsep persamaan kuadrat. Konsep persamaan kuadrat akan kamu pelajari pada Bab VII. Namun, mari kita pelajari sekilas penyelesaian pertidaksamaan kuadrat sebagai alternatif penyelesaian Masalah 2.8 dan 2.9 dengan memperhatikan contoh berikut:

Contoh 2.5

Selesaikanlah pertidaksamaan berikut dengan metode umum $|2x + 1| \geq |x - 3|$!

Alternatif Penyelesaian

Pertidaksamaan di atas dapat diselesaikan dengan memanfaatkan $|x| = \sqrt{x^2}$ dan $|x| = \begin{cases} x & \text{jika} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{jika} \quad x < 0 \end{cases}$ serta grafik. Perhaatikan langkah penyelesaian berikut!

Langkah 1: Ingat bahwa $|x| = \sqrt{x^2}$ sehingga:

Langkah 2: Menentukan pembuat nol.

$$x = \frac{2}{3} \text{ atau } x = -4$$

Langkah 3: Letakkan pembuat nol dan tanda pada garis bilangan



Langkah 4: Menentukan interval penyelesaian.

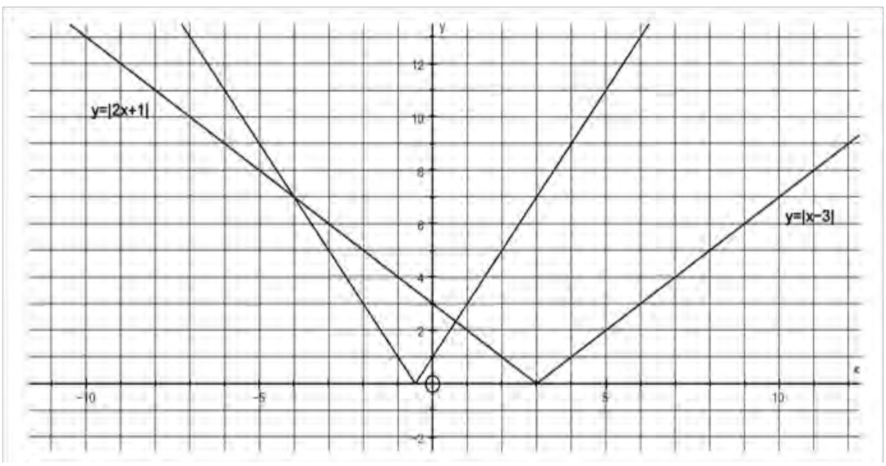
Dalam hal ini, interval penyelesaian merupakan selang nilai x yang membuat pertidaksamaan bernilai positif, sesuai dengan tanda pertidaksamaan pada soal di atas. Dengan demikian arsiran pada interval di bawah ini adalah interval penyelesaian pertidaksamaan tersebut.



Langkah 5: Menuliskan kembali interval penyelesaian

$$HP = \left\{ x \middle| x \leq -4 \text{ atau } x \geq \frac{2}{3} \right\}$$

Permasalahan di atas dapat diselidiki dengan memperlihatkan grafik $y = |2x + 1|$ dan grafik $y = |x + 3|$, untuk setiap $x \in R$. Berdasarkan grafik pada Gambar 2.4, kita memperoleh grafik sebagai berikut.



Pertidaksamaan $|2x + 1| \geq |x - 3|$ dapat dilihat sebagai grafik fungsi $f(x) = |2x + 1|$ berada di atas grafik $f(x) = |x - 3|$. Dari Gambar 2.11 terlihat bahwa pernyataan itu benar untuk nilai x dalam himpunan $\left\{ x \mid x \leq -4 \text{ atau } x \geq \frac{2}{3}, x \in R \right\}$.

Contoh 2.6

Perhatikan kembali Masalah 2.8. Alternatif penyelesaian lainnya dari masalah ini dapat dilihat pada cara III berikut.

Alternatif Penyelesaian

Cara III (Secara Aljabar)

Dengan mengingat bahwa $|T| = \sqrt{T^2}$ maka:

$$|T - 34^oC| \leq 0{,}2^oC \Leftrightarrow \sqrt{(T - 34°C)^2} \leq 0.2°C \quad \text{(kuadratkan)}$$

$$\Leftrightarrow (T - 34^oC)^2 \leq (0{,}2^oC)^2$$

$$\Leftrightarrow (T - 34^oC)^2 - (0{,}2^oC)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow [(T - 34^oC) - (0{,}2^oC)]\,[(T - 34^oC) + (0{,}2^oC)] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow [T - 34{,}2^oC]\,[T - 33{,}8^oC] \leq 0$$

Nilai pembuat nol adalah $T = 34{,}2^oC$ atau $T = 33{,}8^oC$



$$\{T \,|\, 33{,}8^oC \leq T \leq 34{,}2^oC\}$$

Contoh 2.7

Perhatikan kembali Masalah 2.9. Alternatif penyelesaian lainnya dari masalah ini dapat dilihat pada cara II berikut.

Alternatif Penyelesaian

Proses penyelesaianya diserahkan kepada siswa. Coba kamu ikuti langkah penyelesaian berikut.

Langkah 1. Modelkan Simpangan yang terjadi pada lintasan peluru.

$$|(...) - (...)| \leq 0.05$$

Langkah 2. Manfaatkan $|y| = \sqrt{y^2}$ sehingga diperoleh pertidaksamaan kuadrat.

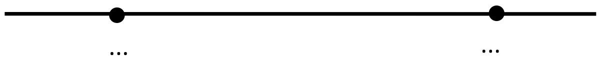
$$(...)x^2 + (...)x + (...) \leq 0$$

Langkah 3. Tentukan faktor dan pembuat nol pada bentuk yang diperoleh

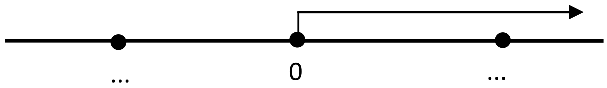
$$[(...)x + (...)]\,[(...)x + (...)] \leq 0$$

Nilai pembuat nol adalah $x = (...)$ atau $x = (...)$

Langkah 4. Letakkan nilai pembuat nol pada selang dan tentukan tanda untuk setiap interval. Semua x yang membuat pertidaksamaan negatif atau nol adalah penyelesaian pada langkah ini.



Langkah 5. Iriskan selang pada langkah 4 dengan $x \geq 0$ karena posisi awal peluru $x = 0$.



Irisan interval tersebut adalah penyelesaian permasalahan tersebut, yaitu $\{x|0 \leq x \leq 2{,}8\}$. Jadi, penyimpangan lintasan peluru akibat pengaruh kecepatan angin dan hentakan senjata sebesar 0,05 m terjadi hanya sejauh 2,8 m dari posisi awal.

Diskusi

Diskusikan kembali dengan teman – temanmu! Tentukan penyelesaian umum pertidaksamaan linear nilai mutlak dengan bentuk umum berikut dengan memanfaatkan $|x| = \sqrt{x^2}$:

$|x| \leq c$ untuk $c \geq 0$

$|x| \geq c$ untuk $c \geq 0$

$|ax + b| \leq c$ untuk $c \geq 0$, a, b, $c, \in \mathrm{R}$

$|ax + b| \geq c$ untuk $c \geq 0$, a, b, $c, \in \mathrm{R}$

$|ax + b| \leq |cx + d|$ untuk a, b, $c, \in \mathrm{R}$

Uji Kompetensi 2.2

Selesaikan soal-soal berikut.

1. Dengan menggunakan Definisi 2.1 maka ubahlah bentuk nilai mutlak berikut!

   a. $|x-2|$

   b. $|5x-15|$

   c. $\left|\frac{5x}{6}-3\right|$

   d. $|x|+|2x-5|$

   e. $|x-1|+|x|+|x+1|$

2. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan berikut!

   a. $|x-2|=6$

   b. $|3x-5|=7$

   c. $|x|+|x-5|=7$

   d. $|2x-2|+|3x-8|=5$

   e. $|x-1|+|2x|+|3x+1|=6$

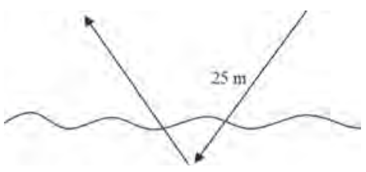
3. Sketsalah grafik $y=\left|\frac{x}{3}-2\right|+6$, untuk setiap nilai x bilangan real.

   Petunjuk: Tentukan pertama kali pasangan koordinat titik yang memenuhi persamaan pada tabel berikut. Kamu diperbolehkan menambahi pasangan koordinat titik sebanyak mungkin pada tabel. Letakkanlah pasangan koordinat titik yang kamu peroleh pada bidang koordinat kartesius. Selanjutnya, hubungkanlah pasangan titik – titik tersebut.

x	...	3	4	5	6	7	8	9	10	...
y	...	7	...	...	6	...	...	7	...	...
(x,y)	...	(3,7)	...	...	(6,6)	...	...	(9,7)	...	...

4. Sketsalah grafik $y = |3x - 2| - 1$, untuk $-2 \leq x \leq 5$, x bilangan real.

5. Seekor burung camar laut terbang pada ketinggian 17 meter melihat ikan pada jarak 25 m pada kedalaman 3 meter dari permukaan laut. Burung tersebut terbang menukik lurus ke permukaan laut dan menyelam sejauh 3 meter untuk menangkap ikan dan langsung bergerak kembali ke permukaan dan langsung terbang kembali seperti gambar.



   Jika diasumsikan permukaan laut sebagai sumbu x, ketinggian sebagai sumbu y, posisi ikan pada koordinat $I(0,-3)$ dan pergerakan burung memenuhi fungsi $f(x) = k|x - a| + b$ dari ketinggian 17 m sampai kedalaman 3 m, dengan a, b, k, dan x adalah bilangan real, tentukanlah nilai a, b dan k.

6. Selesaikanlah pertidaksamaan nilai mutlak sebagai berikut!

   a. $|3-2x|<4$

   b. $\left|\frac{x}{2}+5\right|\geq 9$

   c. $|3x+2|\leq 5$

   d. $2<\left|2-\frac{x}{2}\right|\leq 3$

   e. $|x+5|\leq|1-9x|$

7. Buktikan

   a. $|a+b|\leq|a|+|b|$

   b. $|a-b|\leq|a+b|$

8. Buktikan bahwa grafik persamaan linier dua variabel adalah garis lurus!

9. Gambarkanlah semua titik (x,y) pada bidang yang memenuhi persamaan

   $|x+y|+|x-y|=2.$

10. Gambarkanlah himpunan penye–lesaian pertidakksamaan linear berikut ini dalam bentuk diagram garis!

    a. $4<|x+2|+|x-1|<5$

    b. $|x-2|\leq|x+1|$

Projek

Dalam kehidupan sehari-hari terdapat banyak besaran yang nilainya dinyatakan dalam persamaan linear. Misalkan saja besar tagihan telepon terhadap pemakaian.

- Dapatkan informasi tentang besaran-besaran yang nilainya dinyatakan dengan persamaan linear dan bagaimana bentuk persamaan linear tersebut.
- Demikian juga dengan nilai mutlak. Ketelitian selalu dinyatakan dengan nilai mutlak, karena ketelitian tidak memperhatikan apakah penyimpangan pada nilai sebenarnya adalah positif atau negatif. Dengan kata lain, penyimpangan sebesar –0,05 adalah sama tidak telitinya dengan penyimpangan sebesar 0,05.
- Dapatkan informasi tentang pengguanan nilai mutlak dalam kehidupan sehari-hari yang kamu jumpai.
- Buat laporan tentang hasil pencarian dan pengkajianmu serta paparkan hasilnya di depan kelas. Akan lebih menarik apabila kamu juga membandingkan beberapa alternatif pembayaran yang ditawarkan oleh penyedia jasa (misalnya: telepon, listrik) untuk menentukan alternatif mana yang paling menguntungkan sesuai dengan penggunaan.

D. PENUTUP

Setelah kita membahas materi persamaan dan pertidaksamaan linear, maka dapat diambil berbagai simpulan sebagai acuan untuk mendalami materi yang sama pada jenjang yang lebih tinggi dan mempelajari bahasan berikutnya. Beberapa simpulan disajikan sebagai berikut.

1. Nilai mutlak sebuah bilangan adalah positif. Nilai ini sama dengan akar sebuah bilangan selalu nonnegatif. Misal $a \in$ R, maka $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$.
2. Persamaan dan pertidaksamaan linear dapat melibatkan fungsi nilai mutlak yang diberikan. Misalnya, jika diketahui $|ax + b| = c$, untuk $a, b, c \in R$, $c \geq 0$ maka menurut definisi nilai mutlak diperoleh persamaan $ax + b = c$ atau $-ax - b = c$. Demikian juga untuk pertidaksamaan linear.
3. Bentuk umum persamaan linear dinyatakan: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = 0$ dengan setiap koefisien merupakan bilangan real. Jika $a_1 \neq 0$ dan $a_2 = a_3 = ... = a_n = 0$, maka diperoleh persamaan linear satu variabel dan jika $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ dan $a_3 = a_4 = ... = a_n = 0$, maka diperoleh persamaan linear dua variabel.
4. Pertidaksamaan linear adalah suatu kalimat terbuka yang menggunakan relasi $<$, $\leq$, $>$, dan $\geq$. Misal $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n > 0$ dengan setiap koefisien dan variabelnya merupakan bilangan-bilangan real. Jika $a_1 \neq 0$ dan $a_2 = a_3 = ... = a_n = 0$, maka ditemukan pertidaksamaan linear satu variabel dan jika $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ dan $a_3 = a_4 = ... = a_n = 0$, maka diperoleh pertidaksamaan linear dua variabel.
5. Himpunan penyelesaian suatu persamaan dan pertidaksamaan linear adalah suatu himpunan yang anggotanya nilai variabel yang memenuhi persamaan atau pertidaksamaan tersebut. Banyak anggota himpunan penyelesaiannya sebuah persamaaan linear dapat (1) tepat satu, (2) lebih dari satu (berhingga atau tak berhingga banyak penyelesaian), atau (3) tidak punya penyelesaian.
6. Grafik persamaan linear satu variabel adalah sebuah garis lurus yang horizontal atau vertikal.
7. Grafik persamaan linear dua variabel adalah sebuah garis lurus yang mungkin memotong sumbu x dan sumbu y atau tidak memotong sumbu x tetapi memotong sumbu y atau hanya memotong sumbu y.

Konsep dan sifat-sifat persamaan dan pertidaksamaan linear telah kita temukan dan kita terapkan dalam penyelesaian masalah kehidupan dan penyelesaian masalah matematika. Penguasaan kamu terhadap berbagai konsep dan sifat-sifat persamaan dan pertidaksamaan linear adalah syarat perlu untuk mempelajari bahasan sistem

persamaan linear dua variabel dan tiga variabel serta sistem pertidaksamaan linear dengan dua variabel. Kita akan temukan konsep dan berbagai sifat sistem persamaan linear dua dan tiga variabel melalui penyelesaian masalah nyata yang sangat bermanfaat bagi dunia kerja dan kehidupan kita. Persamaan dan pertidaksamaan linear memiliki himpunan penyelesaian demikian juga sistem persamaan dan pertidaksamaan linear. Pada bahasan sistem persamaan linear dua dan tiga variabel, kamu pelajari berbagai metode penyelesainya untuk menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan dan pertidaksamaan tersebut. Seluru konsep dan aturan-aturan yang kita temukan diaplikasikan dalam penyelesaian masalah yang menuntut kamu berpikir kreatif, tangguh menghadapi masalah, mengajukan ide-ide secara bebas dan terbuka, baik terhadap teman maupun terhadap guru.

Catatan:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bab 3

Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linear

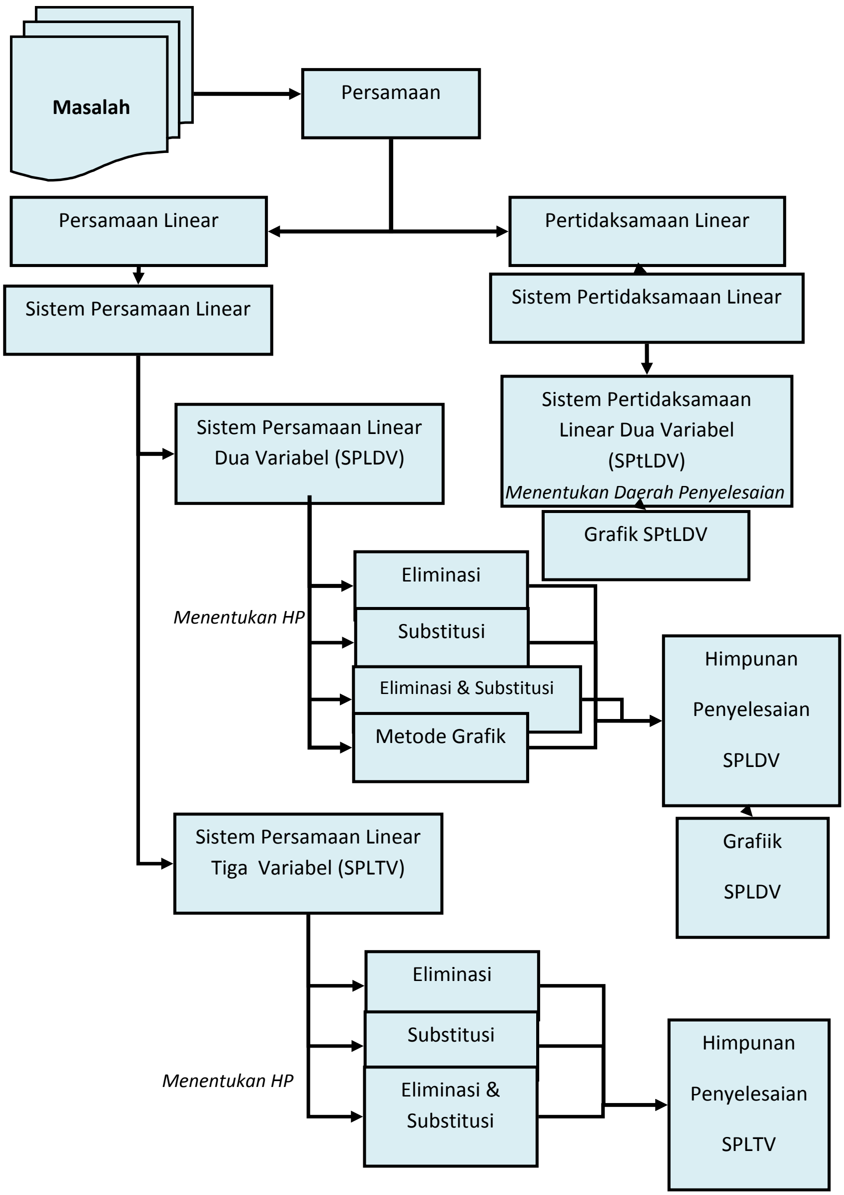
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran sistem persamaan dan pertidaksamaan linear, siswa mampu: 1. Menunjukkan sikap bertanggung jawab, rasa ingin tahu, jujur dan perilaku peduli lingkungan. 2. Mendeskripsikan konsep sistem persamaan linear dua variabel serta pertidaksamaan linear dua variabel dan mampu menerapkan berbagai strategi yang efektif dalam menentukan himpunan penyelesaiannya serta memeriksa kebenaran jawabannya dalam pemecahan masalah matematika. 3. Menggunakan SPLDV, SPLTV, dan sistem pertidaksamaan linear dua variabel (SPtLDV) untuk menyajikan masalah kontekstual dan menjelaskan makna setiap besaran secara lisan maupun tulisan. 4. Membuat model matematika berupa SSPLDV, SPLTV, dan SPtLDV dari situasi nyata dan matematika, serta menentukan jawab dan menganalisis model sekaligus jawabannya.	Melalui pembelajaran materi sistem persamaan dan pertidaksamaan linear, siswa memperoleh pengalaman belajar: • menjelaskan karakteristik masalah otentik yang penyelesaiannya terkait dengan model Matematika sebagai SPLDV atau SPLTV atau SPtLDV. • merancang model matematika dari sebuah permasalahan otentik yang merupakan SPLDV atau SPLTV atau SPtLDV. • menyelesaikan model matematika untuk memperoleh solusi permasalahan yang diberikan. • menginterpretasikan hasil penyelesaian masalah yang diberikan. • menemukan ciri-ciri SPLDV atau SPLTV atau SPtLDV dari model matematika. • menuliskan konsep SPLDV atau SPLTV atau SPtLDV berdasarkan ciri-ciri yang ditemukan dengan bahasanya sendiri. • bekerjasama dalam memecahkan masalah dalam kelompok yang heterogen. • berlatih berpikir kritis dan kreatif.

Istilah Penting

- *SPL*
- *SPLDV*
- *SPLTV*
- *Himpunan Penyelesaian*
- *Grafik Persamaan Linear*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

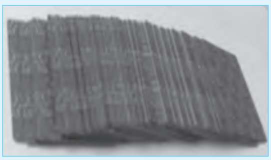
1. Menemukan Konsep Sistem Persamaan linear Dua Variabel

Persamaan dan sistem persamaan linear dua variabel sudah kamu pelajari saat duduk di kelas VIII SMP. Pada saat ini kita perdalam kajian, pemahaman dan jangkauan pemikiran tentang konsep sistem persamaan linear dari apa yang kamu sudah miliki sebelumnya. Pola pikir dan cara belajar yang dituntut dalam mempelajari materi ini, kamu berupaya menemukan ide-ide, berpikir kritis dan kreatif dalam mencari strategi penyelesaian masalah dan mengungkapkannya, berdiskusi dengan teman, mengajukan pertanyaan kepada guru dan teman kelompok.

Banyak permasalahan dalam kehidupan nyata yang menyatu dengan fakta dan lingkungan budaya kita terkait dengan sistem persamaan linear. Permasalahan-permasalahan tersebut kita jadikan bahan inspirasi dan menyusun model-model matematika yang ditemukan dari proses penyelesaiannya. Model matematika tersebut, kita jadikan bahan abstraksi untuk membangun konsep sistem persamaan linear dan konsep sistem persamaan linear dua variabel.

Cermatilah masalah berikut!

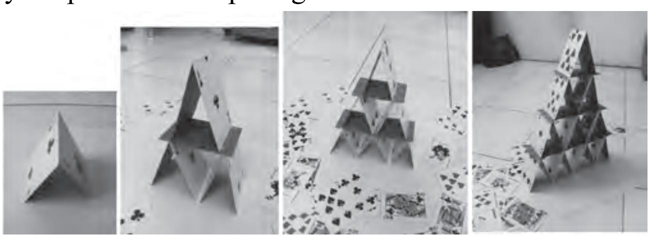
Masalah-3.1



Kartu bergambar dapat dijadikan bahan inspirasi menemukan konsep dan aturan yang terkait dengan sistem persamaan linear melalui masalah yang dirancang.

Gambar 3.1 Kartu Bergambar

Anto bermain kartu bergambar bersama temannya. Ketika mereka selesai bermain, Budi, adiknya Anto mengumpulkan kartu-kartu tersebut. Kemudian ia asyik membangun rumah bertingkat yang diberi nama **Rumah Kartu**. Susunan kartu untuk setiap tingkatnya dapat dicermati pada gambar berikut.



Rumah Kartu 1 Tingkat | Rumah Kartu 2 Tingkat | Rumah Kartu 3 Tingkat | Rumah Kartu 4 Tingkat

Gambar 3.2 Rumah Kartu Bertingkat

Setelah Budi menyusun beberapa rumah kartu bertingkat, ia bertanya dalam pikirannya, bagaimana hubungan antara banyak kartu dan banyak tingkat rumah. Berapa banyak kartu yang dibutuhkan untuk membangun rumah kartu 30 tingkat? Dapatkah kamu membantu Budi untuk menyelesaikan masalah tersebut?

Sebelum kamu menyelesaikan masalah tersebut, kira-kira apakah tujuan masalah tersebut dipecahkan terkait materi? Pikirkan strategi apa yang kamu gunakan. Selesaikanlah masalah di atas. Agar pekerjaan kamu lebih efektif renungkan dan pikirkan beberapa pertanyaan berikut:

1) informasi apa saja yang kamu temukan dalam masalah tersebut?
2) konsep apa saja yang terkait untuk menemukan hubungan antara banyak tingkat rumah dan banyak kartu yang digunakan untuk setiap tingkatnya?
3) bagaimana strategi kamu menemukan hubungan antara banyak tingkat rumah dan banyak kartu bergambar yang digunakan?
4) misalkan t menyatakan banyak tingkat rumah dan k banyak kartu yang dipakai untuk setiap tingkat. Dapatkah kamu rumuskan aturan yang memasangkan banyak tingkat rumah dengan banyak kartu bergambar yang digunakan?
5) adakah kesulitan yang harus didiskusikan dengan teman atau bertanya kepada guru untuk menentukan hubungan antara t dan k?
6) apakah aturan pemasangan yang kamu rumuskan memenuhi situasi penyusunan kartu pada gambar di atas?
7) adakah sistem persamaan linear kamu temukan dari rumusan hubungan antara banyak kartu dan banyak tingkat?
8) dapatkah kamu menjawab permasalahan Budi? Berapa banyak kartu yang digunakan untuk membangun rumah kartu 30 tingkat?

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Gambar 3.2 di atas, diperoleh informasi sebagai berikut.
Rumah kartu bertingkat 1 mengunakan 2 kartu
Rumah kartu bertingkat 2 mengunakan 7 kartu
Rumah kartu bertingkat 3 mengunakan 15 kartu
Rumah kartu bertingkat 4 mengunakan 26 kartu

Sehingga banyak tingkat dan banyak kartu dapat dikorespondensikan satu-satu membentuk suatu relasi sama dengan atau banyak kartu dapat dinyatakan dalam banyak tingkat rumah.

Temukan aturan yang memasangkan banyak tingkat (t) dengan banyak kartu (k).

Banyak Tingkat Rumah (t)	Banyak Kartu (k)	Pola Banyak Kartu
1	2	1 + 1 + 0
2	7	4 + 2 + 1
3	15	9 + 3 + 3
4	26	16 + 4 + 6

Cermati pola, bahwa bilangan 1, 4, 9, 16 adalah kuadrat dari bilangan 1, 2, 3, 4 dan bilangan 1, 2, 3, 4 adalah banyaknya tingkat rumah. Apakah bilangan 0, 1, 3, dan 6 dapat dinyatakan dalam t2 dan t? Asumsikan bahwa jawabanya adalah ya.
Misalkan x dan y adalah bilangan bilangan yang akan ditentukan berkaitan dengan banyak kartu dan banyak tingkat rumah yang dinyatakan dalam persamaan berikut.

$$k = x\,t^2 + y\,t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Cermati kembali Gambar 3.2! Untuk mendapatkan model matematika berupa dua persamaan linear dengan variabel x dan y yang saling terkait.
Untuk $t = 1$ dan $k = 2$ diperoleh persamaan $x + y = 2$
Untuk $t = 2$ dan $k = 7$ diperoleh persamaan $4x + 2y = 7$
Dengan demikian kita peroleh dua buah persamaan linear dua variabel, yaitu

$$\begin{cases} x + y = 2 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 4x + 2y = 7 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Ingat Kembali!

Materi yang telah dipelajari sebelumnya di SMP, yaitu tentang cara menentukan himpunan penyelesaian dua persamaan linear dengan berbagai metode (eliminasi, substitusi, eliminasi dan substitusi, serta metode grafik).

Nilai x dan y dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{array}{l|l|} x + y = 2 & \times 4 \\ 4x + 2y = 7 & \times 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 4x + 4y = 8 \\ 4x + 2y = 7 \; - \\ \hline 2y = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|} x + y = 2 & \times 2 \\ 4x + 2y = 7 & \times 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 2x + 2y = 4 \\ 4x + 2y = 7 \; - \\ \hline -2x = -2 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2} \end{array}$$

Diperoleh himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

- Evaluasi hasil yang diperoleh, apakah hasil yang diperoleh adalah solusi terbaik.

$$k = xt^2 + yt$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2 = \frac{3}{2}(1)^2 + \frac{1}{2}(1) \text{ (pernyataan benar)} \\ 7 = \frac{3}{2}(2)^2 + \frac{1}{2}(2) \text{ (pernyataan benar)} \\ 15 = \frac{3}{2}(3)^2 + \frac{1}{2}(3) \text{ (pernyataan benar)} \\ 26 = \frac{3}{2}(4)^2 + \frac{1}{2}(4) \text{ (pernyataan benar)} \end{array}$$

Dapat disimpulkan, aturan pengaitan banyak tingkat dengan banyak kartu yang digunakan untuk membangun rumah kartu adalah $k = xt^2 + yt$ dengan nilai konstanta x dan y adalah $\frac{3}{2}$ dan $\frac{1}{2}$.

- Tentukan banyak kartu yang digunakan membuat rumah kartu dengan 30 tingkat.

Untuk $t = 30$, diperoleh $k = \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t = \frac{3}{2}(30)^2 + \frac{1}{2}(30)$

$$k = \frac{3}{2}(900) + 15 = 1365$$

Jadi, banyak kartu yang dibutuhkan membangun rumah kartu bertingkat 30 adalah 1365 kartu.

Perhatikan masalah berikut yang dirancang pada sebuah rumah adat salah satu suku di Indonesia.

Masalah-3.2



Gambar 3.3 Rumah Adat

Perhatikan gambar rumah adat di samping.
Atap rumah terbuat dari ijuk pohon aren (Nira). Perbandingan banyak ijuk yang digunakan untuk menutupi permukaan atap bagian bawah dengan permukaan atap bagian tengah adalah 7 : 4. Perbandingan tinggi permukaan atap bagian bawah dengan tinggi permukaan atap bagian tengah adalah 3 : 2. Coba tentukan berapa panjang alas penampang atap bagian bawah dan tengah.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

Perbandingan luas penampang atap bagian bawah dengan bagian tengah adalah 7 : 4.

Perbandingan tinggi penampang atap bagian bawah dengan bagian tengah adalah 3 : 2.

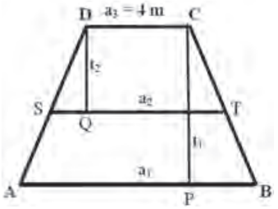
Panjang sisi puncak atap bagian tengah (panjang sisi a_3 pada Gambar-3.3) adalah 4 m.

Ditanya:

a. Panjang alas penampang atap bagian bawah

b. Panjang alas penampang atap bagian tengah

Perhatikan ilustrasi masalah seperti gambar berikut!



Perhatikan gambar di samping, konsep apa yang melekat pada penampang atap rumah adat tersebut.

Misalkan panjang $AB = a_1$, $ST = a_2$, dan $DC = a_3 = 4$ m

Misal: Luas penampang atap bawah ($ABCD$) = L_1

Luas penampang atap tengah ($STCD$) = L_2

Karena penampang atap rumah berbentuk trapesium, maka

$$L_1 = \frac{1}{2}(AB + DC) \times \text{tinggi}$$

$$L_1 = \frac{1}{2} \times (a_1 + a_3) \times t_1$$

$$L_2 = \frac{1}{2}(ST + DC) \times \text{tinggi} = \frac{1}{2} \times (a_2 + a_3) \times t_2$$

Karena perbandingan banyak ijuk yang digunakan menutupi penampang atap bagian bawah dengan banyaknya ijuk yang digunakan menutupi atap bagian tengah adalah 7 : 4, dapat diartikan bahwa $L_1 : L_2 = 7 : 4$.

Petunjuk Lakukan matematisasi dan manipulasi aljabar untuk mendapatkan model matematika berupa persamaan linear.

$$L_1 : L_2 = 7 : 4 \Rightarrow \frac{(a_1 + a_3)t_1}{(a_2 + a_3)t_2} = \frac{7}{4}$$

$$a_3 = 4 \text{ m dan } t_1 : t_2 = 3 : 2 \Rightarrow \frac{3(a_1 + 4)}{2(a_2 + 4)} = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{(a_1 + 4)}{(a_2 + 4)} = \frac{7}{6}$$

$$\Rightarrow 6a_1 + 24 = 7a_2 + 28$$

$$\Rightarrow 6a_1 - 7a_2 = 4$$

$\therefore 6a_1 - 7a_2 = 4$ ....(1)

Ingat Kembali!

Syarat dua bangun datar dikatakan sebangun.

Cermati bahwa trapesium *ABCD* dan trapesium *STCD* adalah sebangun.

$PB = \frac{1}{2}(a_1 - a_3)$ dan $SQ = \frac{1}{2}(a_2 - a_3)$

Karena trapesium *ABCD* dan trapesium *STCD* adalah sebangun,

$$\frac{PB}{SQ} = \frac{t_1}{t_2} \Rightarrow \frac{a_1 - a_3}{a_2 - a_3} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 - 4}{a_2 - 4} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2a_1 - 8 = 3a_2 - 12$$

$$\Rightarrow 2a_1 - 3a_2 = -4$$

$\therefore 2a_1 - 3a_2 = -4$ ....(2)

Dengan demikian, kita telah memperoleh dua persamaan linear dengan variabel a_1 dan a_2 yang saling terkait, yaitu:

$$\begin{cases} 6a_1 - 7a_2 = 4 & \text{.......(1)} \\ 2a_1 - 3a_2 = -4 & \text{.......(2)} \end{cases}$$

Dari persamaan (1) diperoleh

$6a_1 - 7a_2 = 4 \Rightarrow a_1 = \frac{7}{6}a_2 + \frac{4}{6}$ ....(3)

Subtitusikan persamaan (3) ke persamaan (2), diperoleh

$$a_1 = \frac{7}{6}a_2 + \frac{4}{6} \Rightarrow 2a_1 - 3a_2 = -4$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{7}{6}a_2 + \frac{4}{6}\right) - 3a_2 = -4$$

$$\Rightarrow \frac{14}{6}a_2 + \frac{8}{6} - \frac{18}{6}a_2 = -\frac{24}{6}$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{6}a_2 = \frac{-32}{6}$$

$$\Rightarrow a_2 = 8$$

$$a_2 = 8 \Rightarrow a_1 = \frac{7}{6}a_2 + \frac{4}{6} = \frac{56}{6} + \frac{4}{6} = \frac{60}{6}$$

$$\Rightarrow a_1 = 10$$

Himpunan penyelesaian persamaan linear $6a_1 - 7a_2 = 4$ dan $2a_1 - 3a_2 = -4$ adalah $\{(10,8)\}$.

Dengan demikian diperoleh panjang alas penampang atap bagian bawah $a_1 = 10$ m dan panjang alas penampang atap bagian tengah $a_2 = 8$ m.

Diskusi

Masih ingatkah kamu contoh sistem persamaan linear dua variabel ketika belajar di SMP. Perhatikan kembali setiap langkah penyelesaian Masalah-3.1 dan Masalah-3.2.

- Coba temukan contoh sistem persamaan linear dari setiap permasalahan yang merupakan sistem persamaan linear dua variabel.
- Temukan ciri-ciri sistem persamaan linear tersebut dan diskusikan dengan temanmu secara klasikal.

Definisi 3.1

Sistem persamaan linear adalah himpunan beberapa persamaan linear yang saling terkait, dengan koefisien-koefisien persamaan adalah bilangan real.

Definisi 3.2

Sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) adalah suatu sistem persamaan linear yang memiliki dua variabel.

Bentuk umum sistem persamaan linear dengan dua variabel x dan y adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Persamaan-1)} \\ a_2x + b_2y = c_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Persamaan-2)} \end{cases}$$

dengan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, dan c_2 bilangan real; a_1 dan b_1 tidak keduanya 0; a_2 dan b_2 tidak keduanya 0.

x, y : variabel real
a_1, a_2 : koefisien variabel x
b_1, b_2 : koefisien variabel y
c_1, c_2 : konstanta persamaan

Diskusi

Ujilah pemahamanmu. Diskusikan permasalahan di bawah ini dengan kelompokmu.

1. Diberikan dua persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$ dan $2x + 3y = 2$. Apakah kedua persamaan ini membentuk sistem persamaan linear dua variabel?
2. Diberikan dua persamaan $x = 3$ dan $y = -2$. Apakah kedua persamaan tersebut membentuk sistem persamaan linear dua variabel?

Contoh 3.1

Diberikan dua persamaan $x = 3$ dan $y = -2$. Kedua persamaan linear tersebut mem-bentuk sistem persamaan linear dua variabel sebab kedua persamaan linear tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk $x + 0y = 3$ dan $0x + y = -2$ dan variabel x dan y pada kedua persaman memiliki nilai yang sama dan saling terkait.

Untuk lebih mendalami sistem persamaan linear, cermatilah masalah berikut.

Contoh 3.2

Diberikan beberapa sistem persamaan linear berikut.

a) $2x + 3y = 0$ ………………………. (1a)
   $4x + 6y = 0$ ………………………. (1b)

b) $3x + 5y = 0$……………………….. (2a)
   $2x + 7y = 0$……………………….. (2b)

Apakah sistem persamaan linear tersebut memiliki penyelesaian tunggal atau banyak? Apakah persamaan-persamaan dalam sistem persamaan tersebut dapat disederhanakan?

Alternatif Penyelesaian

a) $2x + 3y = 0$.......................... (1a)
   $4x + 6y = 0$ .... (1b)

memiliki lebih dari satu penyelesaian, misalnya (3, – 2), (–3, 2) dan termasuk (0, 0). Persamaan (1b) merupakan kelipatan dari (1a) sehingga (1b) dapat disederhanakan mnjadi $2x + 3y = 0$. Kedua persamaan tersebut memiliki suku konstan nol dan grafik kedua persamaan berimpit. Apabila sebuah SPLDV memiliki penyelesaian tidak semuanya nol dikatakan memiliki penyelesaian tak trivial.

b) $3x + 5y = 0$ .... (2a)
   $2x + 7y = 0$............................ (2b)

memiliki suku konstan nol dan hanya memiliki penyelesaian tunggal, yaitu (0, 0) (mengapa?). Apabila sebuah SPLDV memiliki penyelesaian tunggal (dalam contoh ini $x = 0$ dan $y = 0$), maka SPLDV dikatakan memiliki penyelesaian trivial. SPLDV yang memiliki penyelesaian trivial, maka persamaan tersebut tidak dapat lagi disederhanakan.

Kedua sistem persamaan linear di atas adalah sistem persamaan linear homogen.

Definisi 3.3

Sistem persamaan linear homogen merupakan sistem persamaan linear dengan suku konstan sama dengan nol dan memenuhi salah satu dari dua hal berikut:

1. Sistem tersebut hanya mempunyai penyelesaian trivial.
2. Sistem tersebut mempunyai tak berhingga banyak penyelesaian tak trivial selain penyelesaian trivial.

Untuk memperdalam pemahaman kamu, mari cermati contoh berikut.

Contoh 3.3

Untuk nilai σ apakah sistem persamaan

$$\left.\begin{aligned}(\sigma - 3)x + y = 0\\ x + (\sigma - 3)y = 0\end{aligned}\right\}$$

mempunyai penyelesaian yang tak trivial?

Alternatif Penyelesaian

$(\sigma - 3)\,x + y = 0 \;\Leftrightarrow\; y = -\,(\sigma - 3)\,x.$

Kita subtitusikan persamaan $y = -\,(\sigma - 3)\,x$ ke persamaan $x + (\sigma - 3)\,y = 0$. Sehingga diperoleh

$$x + (\sigma - 3)\,(-\sigma + 3)\,x = 0 \;\Rightarrow\; x + (-\sigma^2 + 6\sigma - 9)\,x = 0$$
$$\Rightarrow\; x = (\sigma^2 - 6\sigma + 9)\,x$$

Agar mempunyai penyelesaian tak trivial, maka $x \neq 0$. Sehingga diperoleh

$$(\sigma^2 - 6\sigma + 9) = 1 \;\Rightarrow\; \sigma^2 - 6\sigma + 8 = 0$$
$$\Rightarrow\; (\sigma - 4)(\sigma - 2) = 0$$
$$\Rightarrow\; \sigma = 4 \text{ atau } \sigma = 2$$

- Ingat makna $a \times b = 0$

Agar sistem persamaan $(\sigma - 3)\,x + y = 0$ dan $x + (\sigma - 3\,y = 0$ mempunyai penyelesaian yang tak trivial, pastilah $\sigma = 4$ atau $\sigma = 2$.

♦ Coba uji nilai $\sigma = 4$ atau $\sigma = 2$ ke dalam persamaan. Apakah benar sistem tersebut memiliki penyelesaian yang tak trivial.

Untuk lebih mendalami aplikasi sistem persamaan linear di atas cermatilah contoh masalah berikut.

Contoh 3.4

Buktikan bahwa untuk setiap $n \in N$, pecahan $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ tidak dapat disederhanakan.

Bukti

Sebuah pecahan tidak dapat disederhanakan apabila Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) pembilang dan penyebutnya adalah 1.

FPB dari $(21n + 4)$ dan $(14n + 3)$ adalah 1, maka akan ditunjukkan adanya bilangan bulat s dan t sehingga $(21n + 4)\,s + (14n + 3)t = 1$.

Karena FPB dari $(21n + 4)$ dan $(14n + 3)$ adalah 1, maka bilangan $(21n + 4)$ dan $(14n + 3)$ saling prima. Jika $(21n + 4)$ dan $(14n + 3)$ saling prima, maka ada bilangan bulat s dan t sedemikian hingga $(21n + 4)\,s + (14n + 3)t = 1$.

$$(21n + 4)\,s + (14n + 3)t = 1 \Rightarrow 21ns + 14nt + 4s + 3t = 1$$
$$\Rightarrow 7n\,(3s + 2t) + (4s + 3t) = 1$$

Agar persamaan $7n\,(3s + 2t) + (4s + 3t) = 1$ dipenuhi untuk setiap n, maka

$3s + 2t = 0$ .... (1)

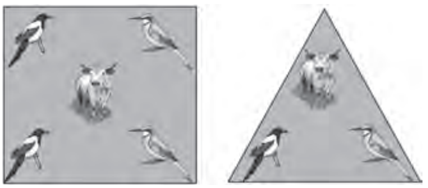
$4s + 3t = 1$ .... (2)

Dengan menerapkan metode eliminasi terhadap Persamaan-1 dan 2, maka diperoleh s = -2 dan t = 3 (mengapa?).
Karena terdapat penyelesaian Persamaan-1 dan 2, yaitu s = -2 dan t = 3 dari, maka $(21n + 4)$ dan $(14n + 3)$ tidak memiliki faktor positif bersama selain 1 untuk semua nilai n di N.
Kesimpulannya pecahan $(21n + 4)/(14n + 3)$ tidak dapat disederhanakan (terbukti).

Uji Kompetensi 3.1

1. Beni membeli 4 buku tulis dan 3 pensil dengan harga Rp 12.500,00 dan Udin membeli 2 buku tulis dan sebuah pensil dengan harga Rp 5.500,00 pada toko yang sama. Susunlah model matematika untuk menentukan harga sebuah buku dan sebuah pensil.

2. Angga anak Pak Purwoko memiliki setumpuk kartu. Keseluruhan kartu dapat dipilah menjadi dua bagian menurut bentuknya. Satu jenis berbentuk persegi yang di dalamnya terdapat gambar seekor kerbau dan empat ekor burung. Satu jenis lagi berbentuk segitiga yang di dalamnya terdapat gambar seekor kerbau dan dua ekor burung. Lihat gambar berikut!



Berapa banyak kartu persegi dan segitiga yang harus diambil dari tumpukan kartu agar jumlah gambar kerbau 33 dan jumlah gambar burung 100.

3. Apakah persamaan – persamaan di bawah ini membentuk sistem persamaan linear dua variabel? Berikan alasan atas jawabanmu!
   a. $xy + 5x = 4$ dan $2x - 3y = 3$, x,y bilangan asli
   b. $x - 3 = 0$ dan $y - 5 = 1$.

4. Jelaskan mengapa penyelesaian sebuah sistem persamaan linear (SPL) adalah salah satu dari tiga kemungkinan berikut: tidak punya penyelesaian, atau memiliki tepat satu penyelesaian atau memiliki tak berhingga penyelesaian!

SOAL TANTANGAN

5. Sebuah perahu yang bergerak searah arus sungai dapat menempuh jarak 46 km dalam 2 jam. Jika perahu tersebut bergerak berlawanan dengan arah arus sungai dapat menempuh jarak 51 km dalam 3 jam. Berapa kecepatan perahu dan kecepatan aliran air sungai?

Projek

Temukan sebuah SPLDV yang menyatakan model matematika dari masalah nyata yang kamu jumpai di lingkungan sekitarmu. Uraikan proses penemuan model matematika yang berupa SPLDV. Kemudian tentukan himpunan penyelesaiannya yang menyatakan pemecahan masalah nyata tersebut. Buat laporan dan persentasikan hasilnya di depan kelas.

2. Menemukan Konsep Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

Konsep persamaan linear dan sistem persamaan linear dua variabel sudah kamu temukan dari masalah yang bersumber dari fakta dan lingkungan budayamu. Dengan cara yang sama kita akan menemukan konsep sistem persamaan linear tiga variabel melalui penyelesaian masalah-masalah nyata. Perbedaan sistem persamaan linear dua variabel dengan sistem persamaan linear tiga variabel terletak pada banyak variabel yang akan ditentukan nilainya. Sekarang cermati beberapa masalah yang diajukan.
Cermati masalah petani di daerah Tapanuli berikut ini!

Mata pencaharian rakyat di Daerah Tapanuli pada umumnya adalah bekerja sebagai petani padi dan palawija, karyawan perkebunan sawit, karet, dan coklat, dan sebagai pedagang (khususnya yang tinggal di daerah wisata Danau Toba). Keterkaitan dan kebergunaan matematika (khususnya materi sistem persamaan linear) untuk menyelesaikan masalah yang dialami para petani, karyawan, dan para pedagang dapat dicermati lebih jauh. Ketika kita menyelesaikan masalah-masalah tersebut menggunakan kerja matematika (coba-gagal, matematisasi, pemodelan masalah secara matematika, melakukan abstraksi, idealisasi, dan generalisasi), kita temukan konsep dan aturan-aturan matematika secara formal. Sekarang mari kita angkat sebuah permasalahan yang dihadapi para petani padi di Kecamatan Porsea di Kabupaten Toba Samosir. Permasalahannya terkait dengan pemakaian pupuk yang harganya cukup mahal.

Masalah-3.4



Gambar 3.4: Pematang sawah Pak Panjaitan

Pak Panjaitan memiliki dua hektar sawah yang ditanami padi dan sudah saatnya diberi pupuk. Terdapat tiga jenis pupuk (Urea, SS, TSP) yang harus digunakan agar hasil panen padi lebih maksimal. Harga per karung setiap jenis pupuk adalah Rp75.000,00; Rp120.000,00; dan Rp150.000,00. Banyak pupuk yang dibutuhkan Pak Panjaitan sebanyak 40 karung. Pemakaian pupuk Urea 2 kali banyaknya dari pupuk SS. Sementara dana yang disediakan Pak Panjaitan untuk membeli pupuk adalah Rp4.020.000,00. Berapa karung untuk setiap jenis pupuk yang harus dibeli Pak Panjaitan.

Sebelum kamu menyelesaikan masalah tersebut, kira-kira apa tujuan masalah tersebut dipecahkan terkait materi. Pikirkan strategi apa yang kamu gunakan untuk mencapai tujuan. Jika kamu mengalami kesulitan silahkan berdiskusi dengan teman atau bertanya kepada guru. Sebagai arahan/petunjuk pengerjaan masalah, ikuti pertanyaan-pertanyaan berikut!

1) Bagaimana kamu menggunakan variabel untuk menyatakan banyak pupuk yang digunakan untuk setiap jenisnya dan hubungan pemakaian antar jenis pupuk?
2) Bagaimana kamu menggunakan variabel untuk menyatakan hubungan harga setiap jenis pupuk dengan dana yang tesedia?
3) Apa yang kamu temukan dari hubungan-hubungan tersebut? Adakah terkait dengan pengetahuan yang kamu miliki dengan melakukan manipulasi aljabar?
4) Apakah ada kesulitan yang harus kamu diskusikan dengan teman atau bertanya kepada guru untuk menentukan hubungan antar variabel, melakukan manipulasi aljabar, kepastian strategi yang kamu pilih ?
5) Adakah variabel yang harus kamu tentukan nilainya? Bagaimana caranya, apakah prinsip analogi (cara yang mirip) dapat digunakan ketika kamu menentukan nilai variabel pada sistem persamaan dua variabel?
6) Berapa karung pupuk yang harus dibeli Pak Panjaitan untuk setiap jenisnya? Masuk akalkah jawaban kamu?

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

– Tiga jenis pupuk: Urea, SS, TSP. Harga per karung untuk setiap jenis pupuk Rp75.000,00; Rp120.000,00; dan Rp150.000,00.
– Banyak pupuk yang dibutuhkan 40 karung.

– Pemakaian pupuk Urea 2 kali lebih banyak daripada pupuk SS.
– Dana yang tersedia Rp4.020.000,00.

Ditanya:

Berapa karung untuk tiap-tiap jenis pupuk yang harus dibeli Pak Panjaitan?

Misalkan: x adalah banyak karung pupuk Urea yang dibutuhkan.
y adalah banyak karung pupuk SS yang dibutuhkan.
z adalah banyak karung pupuk TSP yang dibutuhkan.

Berdasarkan informasi di atas diperoleh hubungan-hubungan sebagai berikut.

$x + y + z = 40$ .... (1)
$x = 2y$ .... (2)
$75.000x + 120.000y + 150.000z = 4.020.000$ .... (3)

- Subtitusikan Persamaan-2 ke dalam Persamaan-1, sehingga diperoleh
  $x = 2y$ dan $x + y + z = 40 \Rightarrow 2y + y + z = 40$
  $\therefore 3y + z = 40$ .... (4)
- Subtitusikan Persamaan-2 ke dalam Persamaan-3, sehingga diperoleh
  $x = 2y$ dan $75x + 120y + 150z = 4.020 \Rightarrow 150y + 120y + 150z = 4.020$
  $\Rightarrow 270y + 150z = 4.020$
  Sederhanakan persamaan sehingga diperoleh
  $\therefore 27y + 15z = 402$ .... (5)

Untuk menentukan nilai y atau z, terapkan metode eliminasi terhadap persamaan (4) dan (5).

$$\begin{array}{l|l|} 3y + z = 40 & \times 15 \\ 27y + 15z = 402 & \times 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rl} 45y + 15z &= 600 \\ 27y + 15z &= 402 \quad - \\ \hline 18y &= 198 \end{array}$$

$18y = 198 \Rightarrow y = 11$
$y = 11$ dan $x = 2y \Rightarrow x = 22$

Dengan mensubtitusikan $x = 22$ dan $y = 11$ ke persamaan $x + y + z = 40$, diperoleh $z = 7$. Dengan demikian nilai $x = 22$, $y = 11$, dan $z = 7$. Cek kembali nilai-nilai yang diperoleh ke setiap persamaan. Dapat diinterpretasikan bahwa banyak pupuk yang harus dibeli Pak Panjaitan dengan uang yang tersedia adalah 22 karung Urea, 11 karung SS, dan 7 karung pupuk TSP.

Nenek moyang kita memiliki keahlian seni ukir (seni pahat). Mereka dapat membuat berbagai jenis patung, ornamen-ornamen yang memiliki nilai estetika yang cukup tinggi. Pak Wayan memiliki keterampilan memahat patung yang diwarisi dari Kakeknya. Dalam melakukan pekerjaannya, ia dibantu dua anaknya; yaitu Gede dan Putu yang sedang duduk di bangku sekolah SMK Jurusan Teknik Bangunan.



Gambar 3.4 Ukiran patung dan ornamen

Masalah-3.5

Suatu ketika Pak Wayan mendapat pesanan membuat 3 ukiran patung dan 1 ornamen rumah dari seorang turis asal Belanda dengan batas waktu pembuatan diberikan selama 5 bulan. Pak Wayan dan Putu dapat menyelesaikan keempat jenis ukiran di atas dalam waktu 7 bulan. Jika Pak Wayan bekerja bersama Gede, mereka dapat menyelesaikan pesanan dalam waktu 6 bulan. Karena Putu dan Gede bekerja setelah pulang sekolah, mereka berdua membutuhkan waktu 8 bulan untuk menyelesaikan pesanan ukiran tersebut. Dapatkah pesanan ukiran diselesaikan dengan batas waktu yang diberikan?

Sebelum kamu menyelesaikan masalah, manfaatkan pengetahuan dan keterampilan yang sudah kamu miliki untuk menemukan aturan, hubungan, dan struktur-struktur yang belum diketahui. Dalam menyelesaikan masalah di atas, langkah penyelesaiannya tersirat dalam beberapa pertanyaan berikut.

1) Bagaimana kamu menentukan kecepatan Pak Wayan, Putu, dan Gede bekerja menyelesaikan satu unit pesanan ukiran tersebut?
2) Dapatkah kamu menentukan hubungan tiap-tiap kecepatan untuk menyelesaikan pekerjaan dalam bentuk persamaan?
3) Apa yang kamu temukan dari hubungan-hubungan tersebut? Adakah kaitannya dengan pengetahuan yang kamu miliki dengan melakukan manipulasi aljabar?
4) Adakah variabel yang harus kamu tentukan nilainya? Bagaimana caranya, apakah prinsip analogi (cara yang mirip) dapat digunakan ketika kamu menentukan nilai variabel pada sistem persamaan dua variabel?.

5) Bagaimana hubungan antara konsep jarak dan kecepatan dalam menentukan lamanya waktu yang digunakan untuk menyelesaikan suatu pekerjaan?
6) Adakah jawaban permasalahan yang kamu temukan?

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

Pesanan pembuatan ukiran patung dan ornamen rumah dengan batas waktu 5 bulan.

Waktu yang dibutuhkan membuat patung dan ornamen:

Pak Wayan dan Putu adalah 7 bulan

Pak Wayan dan Gede adalah 6 bulan

Putu dan Gede adalah 8 bulan

Ditanya: Waktu yang diperlukan bila ketiganya bekerja bersama-sama.

Misalkan: Waktu yang dibutuhkan Pak Wayan adalah x bulan

Waktu yang dibutuhkan Putu adalah y bulan

Waktu yang dibutuhkan I Gede adalah z bulan

Berarti pekerjaan yang dapat diselesaikan Pak Wayan, Putu, dan Gede dengan waktu x, y, dan z, masing-masing $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, dan $\frac{1}{z}$ bagian pekerjaan.

- Bila Pak Wayan dan Putu bekerja bersama dalam satu bulan dapat menyelesaikan $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ bagian pekerjaan. Karena Wayan dan Putu membutuhkan 7 bulan menyelesaikan pekerjaan, maka hal ini dapat dimaknai

$$7\frac{1}{x}+7\frac{1}{y}=1 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{7} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

- Bila Pak Wayan dan Gede bekerja bersama dalam satu bulan dapat menyelesaikan $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)$ bagian pekerjaan. Karena Wayan dan Gede membutuhkan 6 bulan menyelesaikan pekerjaan, maka hal ini dapat dimaknai

$$6\frac{1}{x}+6\frac{1}{z}=1 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

- Bila Putu dan Gede bekerja bersama dalam satu bulan dapat menyelesaikan $\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ bagian pekerjaan. Karena Putu dan Gede membutuhkan 8 bulan menyelesaikan pekerjaan, maka hal ini dapat dimaknai

$$8\frac{1}{y}+8\frac{1}{z}=1 \Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{8} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

- Temukan tiga persamaan linear yang saling terkait dari persamaan (1), (2), dan (3) di atas dengan memisalkan $p = \frac{1}{x}$, $q = \frac{1}{y}$, dan $r = \frac{1}{z}$.
- Tentukan nilai p, q, dan r dengan memilih salah satu metode yang telah dipelajari sebelumnya! Sebagai alternatif pilihan adalah metode campuran eliminasi dan substitusi.

Dengan menerapkan metode eliminasi pada persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$\begin{array}{l|l|} 7p + 7q = 1 & \times 6 \\ 6p + 6r = 1 & \times 7 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 42p + 42q = 6 \\ 42p + 42r = 7 \quad - \\ \hline 42q - 42r = -1 \end{array}$$

$\therefore\ 42q - 42r = -1$ ………………………………………….. (4)

Dengan menerapkan metode eliminasi pada persamaan-3 dan 4 diperoleh

$$\begin{array}{l|l|} 8q + 8r = 1 & \times 42 \\ 42q - 42r = -1 & \times 8 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 336q + 336r = 42 \\ 336q - 336r = -8 \quad - \\ \hline 672r = 50 \end{array}$$

Dari 672 r = 50 diperoleh $r = \frac{50}{672}$

$r = \frac{50}{672}$ disubtitusikan ke persamaan $8q + 8r = 1$ diperoleh $q = \frac{34}{672}$

$q = \frac{34}{672}$ disubtitusikan ke persamaan $7p + 7q = 1$ diperoleh $p = \frac{62}{672}$

Cek kebenaran nilai p, q, dan r pada persamaan (1), (2), dan (3). Sebelumnya telah kita misalkan

$$p = \frac{1}{x} \text{ dan } p = \frac{62}{672} \Rightarrow x = \frac{672}{62} = 10,8$$

$$q = \frac{1}{y} \text{ dan } q = \frac{34}{672} \Rightarrow y = \frac{672}{34} = 19,76$$

$$r = \frac{1}{z} \text{ dan } r = \frac{50}{672} \Rightarrow z = \frac{672}{50} = 13,44$$

Karena x, y, dan z berturut-turut menyatakan waktu yang dibutuhkan Pak Wayan, Putu dan Gede menyelesaikan 1 set pesanan ukiran. Jika bekerja secara individual, maka Pak Wayan dapat menyelesaikan sendiri pesanan dalam waktu 10,84 bulan, Putu dapat menyelesaikan sendiri pesanan dalam waktu 19,76 bulan, dan I Gede dapat menyelesaikan sendiri pesanan dalam waktu 13,44 bulan.

Jadi, waktu yang diperlukan Pak Wayan dan kedua anaknya untuk menyelesaikan 1 set pesanan ukiran patung dan ornamen, jika mereka bekerja secara bersama-sama adalah

$$t = \frac{1}{\left(\frac{62}{672} + \frac{34}{672} + \frac{50}{672}\right)}$$

$$= \frac{672}{146}$$

t = 4,6 bulan

Karena waktu yang diberikan turis adalah 5 bulan, maka ternyata pekerjaan (pesanan) tersebut dapat diterima dan dipenuhi.

Ingat Kembali!

Pengertian sistem persamaan linear dua variabel yang telah dipelajari sebelumnya dan mencermati kembali Persamaan-1, 2, dan 3 pada langkah penyelesaian Masalah-3.4 dan Masalah-3.5, temukan sistem persamaan linear tiga variabel pada langkah penyelesaian Masalah-3.4 dan Masalah-3.5!

- Dari penyelesaian Masalah 3.4 diperoleh sistem persamaan linear

$$\begin{cases} 7p + 7q = 1 \text{ ....} (1) \\ 6p + 6r = 1 \text{ ....} (2) \\ 8q + 8r = 1 \text{ ....} (3) \end{cases}$$

- Dari penyelesaian Masalah 3.5 diperoleh sistem persamaan linear

$$\begin{cases} x + y + z = 40 \text{ ....} (1) \\ x = 2y \text{ ....} (2) \\ 75.000x + 120.000y + 150.000z = 4.020.000 \text{ ....} (3) \end{cases}$$

- Tuliskan ciri-ciri sistem persamaan linear tiga variabel secara individual dan diskusikan hasilnya dengan temanmu secara klasikal.

Definisi 3.4

Sistem persamaan linear tiga variabel adalah suatu sistem persamaan linear dengan tiga variabel.

Notasi:

Bentuk umum sistem persamaan linear dengan tiga variabel x, y, dan z adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & \text{.......... (1)} \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & \text{.......... (2)} \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & \text{.......... (3)} \end{cases}$$

dengan a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, dan d_3 bilangan real, dan a_1, b_1, dan c_1 tidak ketiganya 0; a_2, b_2, dan c_2 tidak ketiganya 0; dan a_3, b_3, dan c_3 tidak ketiganya 0.

x, y, z : variabel

a_1, a_2, a_3 : koefisien variabel x

b_1, b_2, b_3 : koefisien variabel y

z_1, z_2, z_3 : koefisien variabel z

d_1, d_2, d_3 : konstanta persamaan

♦ Untuk lebih memahami definisi di atas, pahami contoh dan bukan contoh berikut ini. Berikan alasan, apakah sistem persamaan yang diberikan termasuk contoh atau bukan contoh sistem persamaan linear dua variabel atau tiga variabel?

Contoh 3.5

Diberikan tiga persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$, $2p + 3q - r = 6$, dan $p + 3q = 3$. Ketiga persamaan ini tidak membentuk sistem persamaan linear tiga variabel sebab persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ bukan persamaan linear. Jika persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ diselesaikan diperoleh persamaan $z(x + y) + xy = 2xyz$ yang tidak linear. Alasan kedua adalah variabel-variabelnya tidak saling terkait.

Contoh 3.6

Diberikan dua persamaan $x = -2$; $y = 5$; dan $2x - 3y - z = 8$. Ketiga persamaan linear tersebut membentuk sistem persamaan linear tiga variabel sebab ketiga persamaan linear tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\left.\begin{aligned} x + 0y + 0z &= -2 \\ 0x + y + 0z &= 5 \\ 2x - 3y - z &= 8 \end{aligned}\right\}$$

dan variabel-variabelnya saling terkait.

Selanjutnya perhatikan beberapa sistem persamaan linear tiga variabel (*SPLTV*) berikut.

1. Diberikan *SPLTV* $2x + 3y + 5z = 0$ dan $4x + 6y + 10z = 0$. Sistem persamaan linear ini memiliki lebih dari satu penyelesaian; misalnya, (3,–2,0), (–3, 2,0) dan termasuk (0,0,0). Selain itu, kedua persamaan memiliki suku konstan nol dan grafik kedua persamaan adalah berimpit. Apabila penyelesaian suatu *SPLTV* tidak semuanya nol, maka *SPLTV* itu disebut memiliki penyelesaian yang tak trivial.
2. Diberikan *SPLTV* $3x + 5y + z = 0$; $2x + 7y + z = 0$, dan $x - 2y + z = 0$. Sistem persamaan linear ini memiliki suku konstan nol dan mempunyai penyelesaian tunggal, yaitu untuk $x = y = z = 0$. Apabila suatu *SPLTV* memiliki himpunan penyelesaian $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, maka *SPLTV* itu disebut memiliki penyelesaian trivial ($x = y = z = 0$).

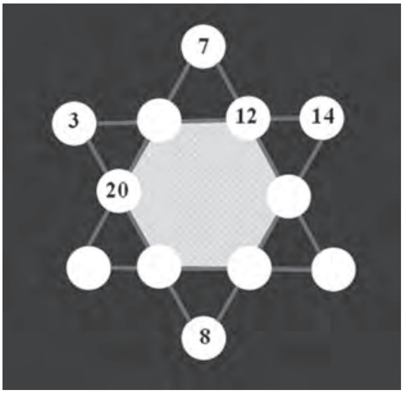
Sebuah *SPLTV* dengan semua konstanta sama dengan nol disebut *SPLTV* homogen. Bila salah satu konstantanya tidak nol, maka *SPLTV* tersebut tidak homogen. *SPLTV* yang homogen memiliki dua kemungkinan, yaitu memiliki penyelesaian yang *trivial* atau memiliki banyak penyelesaian *nontrivial* selain satu penyelesaian *trivial*. Coba tuliskan definisi *SPLTV* yang homogen dan berikan contohnya, selain contoh di atas.

Uji Kompetensi 3.2

1. Apakah persamaan - persamaan di bawah ini membentuk sistem persamaan linear tiga variabel? Berikan alasan atas jawabanmu!
   a. $2x + 5y - 2z = 7$, $2x - 4y + 3z = 3$
   b. $x - 2y + 3z = 0$, $y = 1$, dan $x + 5z = 8$

2. Diberikan tiga persamaan
   $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{z} = 9$; $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{3}$; dan
   $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 7$
   a. Apakah termasuk sistem persamaan linear tiga variabel? Berikan alasan!
   b. Dapatkah kamu membentuk sistem persamaan linear dari ketiga persamaan tersebut?

3. Seekor ikan mas memiliki ekor yang panjangnya sama dengan panjang kepalanya ditambah seperlima panjang tubuhnya. Panjang tubuhnya empat perlima panjang keseluruhan ikan. Jika panjang kepala ikan adalah 5 cm, berapa panjang keseluruhan ikan tersebut?

4. 

   Isilah lingkaran kosong pada "bintang ajaib" dengan sebuah bilangan sehingga bilangan-bilangan pada satu garis memiliki jumlah yang sama!

5. Diberikan sistem persamaan linear berikut.
   $x + y + z = 4$
   $z = 2$
   $(t^2 - 4)z = t - 2$
   Berapakah nilai t agar sistem tersebut tidak memiliki penyelesaian, satu penyelesaian dan tak berhingga banyak penyelesaian?

6. Temukan bilangan-bilangan positif yang memenuhi persamaan $x + y + z = 9$ dan $x + 5y + 10z = 44$!

7. Diberikan dua persamaan sebagai berikut:
   $$\begin{cases} 7a - 6b - 2c = 9 \\ 6a + 7b - 9c = -2 \end{cases}$$
   Tentukan nilai $a^2 + b^2 - c^2$!

8. **SOAL TANTANGAN**



Seorang penjual beras, mencampur tiga jenis beras. Campuran beras pertama terdiri atas 1 kg jenis *A*, 2 kg jenis *B*, dan 3 kg jenis *C* dijual dengan harga Rp19.500,00. Campuran beras kedua terdiri atas 2 kg jenis *A* dan 3 kg jenis *B* dijual dengan harga Rp 19.000,00. Campuran beras ketiga terdiri atas 1 kg jenis *B* dan 1 kg jenis *C* dijual dengan harga Rp 6250,00. Harga beras jenis mana yang paling mahal?

Projek

Cari sebuah SPLTV yang menyatakan model matematika dari masalah nyata yang kamu temui di lingkungan sekitarmu. Uraikan proses penemuan model matematika tersebut dan selesaikan sebagai pemecahan masalah tersebut. Buat laporan hasil kerjamu dan hasilnya dipresentasikan di depan kelas.

3. Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

a. Menentukan Himpunan Penyelesaian Sistem Persamaan linear Dua Variabel

Di kelas VIII SMP, kamu telah mempelajari berbagai metode menentukan himpunan penyelesaian suatu sistem persamaan linear dua variabel (*SPLDV*). Metode-metode tersebut antara lain: metode grafik, metode eliminasi, metode substitusi, dan campuran ketiga metode tersebut. Penggunaan yang lebih efektif dan efisien dari keempat metode tersebut dalam penyelesaian soal tergantung sistem persamaan linear yang diberikan, situasi masalah, dan waktu yang tersedia. Sekarang mari kita ulang kembali mempelajari metode-metode tersebut.

1). ***Metode Grafik***

Berdasarkan Definisi 3.2, *SPLDV* terbentuk dari dua persamaan linear yang saling terkait. Sebelumnya kamu telah mengetahui bahwa grafik persamaan linear dua variabel berupa garis lurus. Pada langkah penyelesaian Masalah 3.1 telah diperoleh sistem persamaan linear dua variabel

$x + y = 2$ .... (1)

$4x + 2y = 7$ .... (2)

Bagaimana menggambar grafik (kurva) Persamaan-1 dan 2 di atas?
Langkah-langkah untuk menggambarkan grafik kedua persamaan linear tersebut tersirat dalam pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Bagaimana strategi kamu untuk mendapatkan titik-titik yang dilalui grafik kedua persamaan linear tersebut?
2) Apakah kamu masih ingat apa yang dimaksud gradien suatu garis lurus?
3) Ada berapa kemungkinan posisi dua garis dalam satu sumbu koordinat. Mengapa hal itu terjadi, pikirkan apa alasan kamu, cari hubungan-hubungan kedua garis lurus tersebut?
4) Dapatkah kamu gambarkan kemungkinan posisi dua garis lurus tersebut dalam sumbu koordinat?
5) Untuk persamaan yang diberikan, bagaimana posisi kedua grafik persamaan tersebut? Dapatkah kamu menuliskan himpunan penyelesaian yang kamu peroleh. Dalam bentuk apa anggota himpunan penyelesaian tersebut?

Mari kita terapkan langkah-langkah di atas.

- Menentukan titik-titik potong terhadap sumbu koordinat untuk Persamaan-1.

	$x + y = 2$	
x	0	2
y	2	0

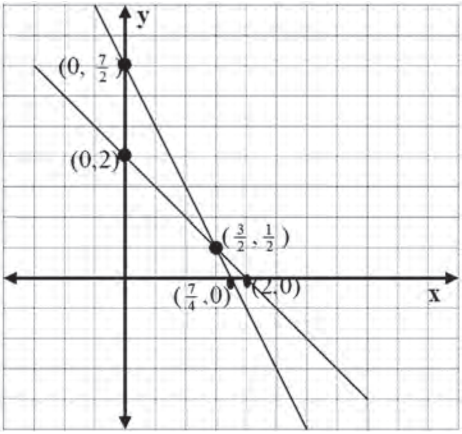
Diperoleh titik-titik potong kurva $x + y = 2$ terhadap sumbu koordinat, yaitu titik (0, 2) dan (2, 0).

- Menentukan titik-titik potong terhadap sumbu koordinat untuk Persamaan-2.

	$4x + 2y = 7$	
x	0	$\frac{7}{4}$
y	$\frac{7}{2}$	0

Diperoleh titik-titik potong kurva $4x + 2y = 7$ terhadap sumbu koordinat, yaitu titik $(0, \frac{7}{2})$ dan $(\frac{7}{4}, 0)$.

- Menarik garis lurus dari titik (0, 2) ke titik (2, 0) dan dari titik $(0, \frac{7}{2})$ ke titik $(\frac{7}{4}, 0)$.



Gambar 3.6 Grafik persamaan linear

Berdasarkan gambar grafik $x + y = 2$ dan $4x + 2y = 7$, kedua garis lurus tersebut berpotongan pada sebuah titik, yaitu titik $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

Sehingga himpunan penyelesaian sistem persamaan linear $x + y = 2$ dan $4x + 2y = 7$ adalah $\left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

2) ***Metode Eliminasi***

Metode eliminasi yang kamu kenal di SMP sudah kita terapkan terhadap *SPLDV* $x + y = 2$ dan $4x + 2y = 7$ pada langkah penyelesaian Masalah-3.1.
Nilai x dan y dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{array}{l|l|} x + y = 2 & \times 4 \\ 4x + 2y = 7 & \times 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 4x + 4y = 8 \\ 4x + 2y = 7 \; - \\ \hline 2y = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|} x + y = 2 & \times 2 \\ 4x + 2y = 7 & \times 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 2x + 2y = 4 \\ 4x + 2y = 7 \; - \\ \hline -2x = -3 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2} \end{array}$$

Diperoleh himpunan penyelesaian kedua persamaan adalah $\left\{\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

Sekarang mari kita pecahkan masalah berikut.

> Berdasarkan bentuk umum sistem persamaan linear dua variabel, bagaimana cara menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dengan metode eliminasi?

Berdasarkan Definisi 3.2, bentuk umum *SPLDV* dengan variabel x dan y adalah

$a_1x + b_1y = c_1$ .... (1)

$a_2x + b_2y = c_2$ .... (2)

dengan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, dan c_2 bilangan real, dan a_1 dan b_1 tidak keduanya nol; a_2 dan b_2 tidak keduanya nol.

Sebelum kamu menyelesaikan masalah ini, apakah kamu memahami tujuan masalah dipecahkan? Bagaimana strategi kamu memanfaatkan pengetahuan yang telah kamu miliki? Untuk itu perhatikan beberapa pertanyaan berikut.

1. Apa yang dimaksud mengeliminasi variabel x atau y dari Persamaan-1 dan 2 di atas?
2. Berapa kemungkinan melakukan eliminasi agar nilai x dan y diperoleh?
3. Dapatkah kamu menuliskan himpunan penyelesaian yang kamu peroleh? Dalam bentuk apa anggota himpunan penyelesaian tersebut?
4. Strategi apa yang kamu gunakan untuk menguji bahwa himpunan penyelesaian yang kamu peroleh sudah benar?

3) *Metode Substitusi*

Sekarang mari kita pecahkan masalah berikut dengan mengikuti langkah metode substitusi di atas.

> Bagaimana menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel (berdasarkan definisi 3.2) dengan metode substitusi?

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Definisi 3.2, bentuk umum sistem persamaan linear dengan dua variabel *x* dan *y* dinotasikan sebagai berikut.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & \text{.. (1)} \\ a_2x + b_2y = c_2 & \text{.. (2)} \end{cases}$$

dengan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 adalah bilangan-bilangan real; a_1 dan b_1 tidak keduanya nol; a_2 dan b_2 tidak keduanya nol.

Dari Persamaan-1 diperoleh

$a_1x + b_1y = c_1$ dan $a_1 \neq 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b_1}{a_1}y + \dfrac{c_1}{a_1}$

$x = -\dfrac{b_1}{a_1}y + \dfrac{c_1}{a_1}$ substitusi ke persamaan $a_2x + b_2y = c_2$ dan diperoleh

$$\Rightarrow a_2\left(-\frac{b_1}{a_1}y + \frac{c_1}{a_1}\right) + b_2y = c_2$$

$$\Rightarrow -\frac{a_2b_1}{a_1}y + \frac{a_2c_1}{a_1} + \frac{a_1c_2}{a_1}y = \frac{a_2c_3}{a_1}$$

$$\Rightarrow \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)}{a_1}y = \frac{(a_1c_2 - a_2c_1)}{a_1}$$

$$\Rightarrow y = \frac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}$$

$y = \dfrac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}$ substitusi ke persamaan $x = -\dfrac{b_1}{a_1}y + \dfrac{c_1}{a_1}$ dan diperoleh

$$x = -\frac{b_1\left(a_2c_1 - a_1c_2\right)}{a_1\left(a_2b_1 - a_1b_2\right)} + \frac{c_1}{a_1} \Rightarrow x = \frac{b_1\left(a_1c_2 - a_2c_1\right)}{a_1\left(a_2b_1 - a_1b_2\right)} + \frac{c_1\left(a_2b_1 - a_1b_2\right)}{a_1\left(a_2b_1 - a_1b_2\right)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\left(b_1c_2 - b_2c_1\right)}{\left(a_2b_1 - a_1b_2\right)}$$

Dengan demikian himpunan penyelesaian adalah $\left\{\left(\frac{\left(b_1c_2 - b_2c_1\right)}{\left(a_2b_1 - a_1b_2\right)}, \frac{\left(a_2c_1 - a_1c_2\right)}{\left(a_2b_1 - a_1b_2\right)}\right)\right\}$.

Contoh 3.7

Aku dan temanku adalah bilangan. Jika tiga kali aku ditambah temanku maka hasilnya adalah lima. Jika dua kali aku ditambah tiga kali temanku maka hasilnya adalah 8. Berapakah aku dan temanku?

Alternatif Penyelesaian

misalkan x = Aku; y = temanku, maka diperoleh

$3x + y = 5$ .... (1)

$2x + 3y = 8$ .... (2)

$3x + y = 5 \Rightarrow y = -3x + 5$

substitusikan $y = -3x + 5$ ke persamaan (2), maka diperoleh

$2x + 3(-3x + 5) = 8$

$2x - 9x + 15 = 8$

$x = 1$

substitusikan $x = 1$ ke $y = -3x + 5$, maka diperoleh $y = -3(1) + 5 = 2$.

Dengan demikian aku adalah 1 dan temanku adalah 2

4) *Metode Eliminasi dan Substitusi*

Bagaimana menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan metode campuran eliminasi dan substitusi?

Berdasarkan Definisi 3.2, bentuk umum *SPLDV* dengan variabel x dan y adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{...} (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 \quad \text{...} (2) \end{cases}$$

dengan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, dan c_2 bilangan real; a_1 dan b_1 tidak keduanya nol; a_2 dan b_2 tidak keduanya nol.

Contoh 3.8

Ongkos bus untuk 2 orang dewasa dan tiga orang anak-anak adalah Rp 1.200.000,00 dan ongkos bus untuk 3 orang dewasa dan empat orang anak-anak adalah Rp 1.700.000,00. Jika sepasang suami istri dan dua orang anaknya akan berpergian dengan bus tersebut, berapakah ongkos yang harus dibayar mereka?

Alternatif Penyelesaian

misalkan x = ongkos dewasa; y = ongkos anak-anak, maka diperoleh

$2x + 3y = 1.200.000$ .... (1)

$3x + 4y = 1.700.000$........................ (2)

$$\begin{array}{l|l} 2x + 3y = 1.200.000 & \times 3 \\ 3x + 4y = 1.700.000 & \times 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6x + 9y = 1.200.000 \\ 6x + 8y = 1.700.000 - \\ \hline y = 200.000 \end{array} \text{..................................} (3)$$

substitusikan (3) ke (1) maka diperoleh

$$\begin{aligned} 2x + 3\,(200.000) &= 1.200.000 \\ &= 1.200.000 \\ x &= 300.000 \end{aligned}$$

ongkos yang harus dibayar adalah

$2\,(300.000) + 2\,(200.000) = 1.000.000$

jadi ongkos yang harus dibayar adalah Rp 1.000.000

Diskusi

Berdasarkan kedudukan dua garis dalam satu sumbu kordinat, tentukan berapa kemungkinan penyelesaian suatu *SPLDV*. Diskusikan dengan temanmu. Beri contoh *SPLDV* untuk tiga kasus, gambarkan grafiknya dalam sumbu kordinat dan tentukan penyelesaiannya. Buat laporan hasil kerja kelompokmu dan sajikan di depan kelas!

b. Menentukan Himpunan Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

Penentuan himpunan penyelesaian *SPLTV* dilakukan dengan cara atau metode yang sama dengan penentuan penyelesaian *SPLDV*, kecuali dengan metode grafik. Umumnya penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel diselesaikan dengan metode eliminasi substitusi. Berikut akan disajikan contoh tentang menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel dengan metode campuran eliminasi dan substitusi.

Contoh 3.9

Jumlah tiga bilangan sama dengan 45. Bilangan pertama ditambah 4 sama dengan bilangan kedua, dan bilangan ketiga dikurangi 17 sama dengan bilangan pertama. Tentukan masing-masing bilangan tersebut!

Alternatif Penyelesaian

misalkan x = bilangan pertama

y = bilangan kedua

z = bilangan ketiga

Pada soal di atas, diperoleh informasi keterkaitan bilangan x, y, dan z yang dinyatakan dalam persamaan berikut.

$x + y + z = 45$ .... (1)

$x + 4 = y$ ………………... (2)

$z - 17 = x$ ………………... (3)

Ditanya:

Tentukan bilangan x, y, dan z!

Kita lakukan proses eliminasi pada persamaan (1) dan (2), sehingga diperoleh

$$\begin{array}{lcl} x + y + z & = & 45 \\ x - y & = & -4 \; + \\ \hline 2x + z & = & 41 \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (4)$$

Kita lakukan proses eliminasi pada persamaan (3) dan (4), sehingga diperoleh

$$\begin{array}{lcl} x - z & = & -17 \\ 2x + z & = & 41 \; + \\ \hline x & = & 8 \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (5)$$

Kita lakukan proses substitusikan (5) ke (2) diperoleh

$8 + 4 = y \Rightarrow y = 12$

Kita lakukan proses substitusikan (5) ke (3) diperoleh

$z - 17 = 8 \Rightarrow z = 25$

Dengan demikian bilangan $x = 8$, bilangan $y = 12$, dan bilangan $z = 25$.

Cara lain yang dapat kamu gunakan selain metode eliminasi, substitusi, dan campuran eliminasi substitusi (kamu coba sendiri) untuk menentukan penyelesaian SPLTV adalah cara determinan, menggunakan invers matriks yang akan kamu pelajari di kelas XI. Sekarang kita akan temukan penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel dengan metode lain.

- ♦ Tentukan himpunan penyelesaian *SPLTV* secara umum berdasarkan konsep dan bentuk umum sistem persamaan linear dua variabel yang telah ditemukan dengan mempedomani langkah penyelesaian metode eliminasi di atas untuk menemukan metode Sarrus.

Berdasarkan Definisi 3.4, bentuk umum sistem persamaan linear dengan tiga variabel x, y, dan z adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.3) \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.4) \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.5) \end{cases}$$

dengan a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, dan d_3 bilangan real, dan a_1, b_1, dan c_1 tidak ketiganya 0; a_2, b_2, dan c_2 tidak ketiganya 0; dan a_3, b_3, dan c_3 tidak ketiganya 0.

Langkah-1: Eliminasi variabel x dari (3.3) dan (3.4)

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{array} \left| \begin{array}{l} \times a_2 \\ \times a_1 \end{array} \right| \longrightarrow \begin{array}{l} a_1a_2x + a_2b_1y + a_2c_1z = a_2d_1 \\ a_1a_2x + a_1b_2y + a_1c_2z = a_1d_2 \quad - \\ \hline (a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2)z = a_2d_1 - a_1d_2 \end{array}$$

$(a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2)z = a_2d_1 - a_1d_2$ ………………………………… (3.6)

Langkah-2: Eliminasi variabel x dari (3.3) dan (3.5)

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{array} \left| \begin{array}{l} \times a_3 \\ \times a_1 \end{array} \right| \longrightarrow \begin{array}{l} a_1a_3x + a_3b_1y + a_3c_1z = a_3d_1 \\ a_1a_3x + a_1b_3y + a_1c_3z = a_1d_3 \quad - \\ \hline (a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_3c_1 - a_1c_3)z = a_3d_1 - a_1d_3 \end{array}$$

$(a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_3c_1 - a_1c_3)z = a_3d_1 - a_1d_3$ ………………………………… (3.7)

Langkah-3: Eliminasi variabel y dari (3.6) dan (3.7)

$$\begin{array}{l} (a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2)z = a_2d_1 - a_1d_2 \\ (a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_3c_1 - a_1c_3)z = a_3d_1 - a_1d_3 \end{array} \left| \begin{array}{l} \times (a_3b_1 - a_1b_3) \\ \times (a_2b_1 - a_1b_2) \end{array} \right|$$

Dari hasil perkalian koefisien variabel y pada (3.6) terhadap (3.7) dan hasil perkalian koefisien variabel y pada (3.7) terhadap (3.6) maka diperoleh

$$z = \frac{\left(\left(a_2d_1 - a_1d_2\right)\left(a_3b_1 - a_1b_3\right) - \left(a_3d_1 - a_1d_3\right)\left(a_2b_1 - a_1b_2\right)\right)}{\left(\left(a_2c - a_1c_2\right)\left(a_3b_1 - a_1b_3\right) - \left(a_3c_1 - a_1c_3\right)\left(a_2b - a_1b_2\right)\right)}$$

$$z = \frac{\left(\left(a_1a_1b_3d_2 - a_1a_2b_3d_1 - a_1a_3b_1d_2\right) - \left(a_1a_1b_2d_3 - a_1a_3b_2d_1 - a_1a_2b_1d_3\right)\right)}{\left(\left(a_1a_1b_3c_1 - a_1a_2b_3c_1 - a_1a_2b_1c_2\right) - \left(a_1a_1b_2c_3 - a_1a_3b_2c_1 - a_1a_2b_1c_3\right)\right)}$$

$$z = \frac{\left(\left(a_1b_3d_2 - a_2b_3d_1 - a_3b_1d_2\right) - \left(a_1b_2d_3 - a_3b_2d_1 - a_2b_1d_3\right)\right)}{\left(\left(a_1b_3c_1 - a_2b_3c_1 - a_2b_1c_2\right) - \left(a_1b_2c_3 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3\right)\right)}$$

$$z = \frac{\left(\left(a_3b_2d_1 + a_1b_3d_2 + a_2b_1d_3\right) - \left(a_1b_2d_3 + a_3b_1d_2 + a_2b_3d_1\right)\right)}{\left(\left(a_3b_2c_1 + a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3\right) - \left(a_1b_2c_3 + a_3b_2c_2 + a_2b_3c_1\right)\right)}.$$

- ♦ Lakukan kegiatan matematisasi (mengkoordinasi pengetahuan dan keterampilan yang telah kamu miliki sebelumnya untuk menemukan aturan-aturan, hubungan-hubungan dan struktur-struktur yang belum diketahui).

Nilai variabel z di atas dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian koefisien-koefisien variabel x, y dan konstanta pada sistem persamaan linear yang diketahui.

$$z = \frac{\left[\begin{array}{ccc:cc} a_1 & b_1 & d_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right]}{\left[\begin{array}{ccc:cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right]}$$

Petunjuk:
- Jumlahkan hasil perkalian bilangan-bilangan pada garis penuh dan hasilnya dikurangi dengan jumlah hasil perkalian bilangan-bilangan pada garis putus-putus.
- Lakukan pada pembilang dan penyebut.

Dengan menggunakan cara menentukan nilai z, ditentukan nilai x dan y dengan cara berikut.

$$x = \frac{\left|\begin{array}{ccc:cc} d_1 & b_1 & c_1 & d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 & d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 & d_3 & b_3 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc:cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right|} \qquad y = \frac{\left|\begin{array}{ccc:cc} a_1 & d_1 & c_1 & a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 & a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 & a_3 & d_3 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc:cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right|}$$

Diskusi

Perhatikan ciri penyelesaian untuk *x*, *y*, dan *z* di atas. Coba temukan pola penentuan nilai *x*, *y*, dan *z*. Sehingga memudahkan menentukan penyelesaian SPLTV.

Pada langkah penyelesaian Masalah 3.5 diperoleh sebuah sistem persamaan linear tiga variabel sebagai berikut.

$x + y + z = 40$ .... (1)
$x = 2y$ .... (2)
$75 + 120y + 150z = 4.020$ .... (3)

Ingat untuk menggunakan semua variabel harus pada ruas kiri, dan semua konstanta berada pada ruas kanan. Untuk itu *SPLTV* di atas diubah menjadi

$x + y + z = 40$ .... (1)
$x – 2y = 0$ ....(2)
$75 + 120y + 150z = 4.020$ .... (3)

Tentunya kamu dengan mudah memahami bahwa

$a_1 = 1$	$a_2 = 1$	$a_3 = 75$
$b_1 = 1$	$b_2 = -2$	$b_3 = 120$
$c_1 = 1$	$c_2 = 0$	$c_3 = 150$
$d_1 = 40$	$d_2 = 0$	$d_3 = 4020.$

Oleh karena itu, nilai *x*, *y*, dan *z* ditentukan sebagai berikut.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 40 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4020 & 120 & 150 \end{vmatrix} \begin{matrix} 40 & 1 \\ 0 & -2 \\ 4020 & 120 \end{matrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 75 & 120 & 150 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 75 & 120 \end{matrix}} = \frac{(-8040+0+0)-(-12000+0+0)}{(-150+0+150)-(-300+0+120)} = \frac{3960}{180} = 22$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 40 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 75 & 4020 & 150 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 40 \\ 1 & 0 \\ 75 & 4020 \end{matrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 75 & 120 & 150 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 75 & 120 \end{matrix}} = \frac{(0+0+6000)-(0+0+4020)}{180} = \frac{1980}{180} = 11$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 40 \\ 1 & -2 & 0 \\ 75 & 120 & 4020 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 75 & 120 \end{matrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 75 & 120 & 150 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 75 & 120 \end{matrix}} = \frac{(-6000+0+4020)-(-8040+4800)}{180} = \frac{1260}{180} = 7$$

Berdasarkan hasil perhitungan di atas diperoleh himpunan penyelesaian *SPLTV* tersebut adalah *HP* = {(22,11,7)}. Ternyata hasilnya sama dengan himpunan penyelesaian yang diperoleh dengan metode eliminasi dan substitusi sebelumnya.

- Dengan memperhatikan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear pada penyelesaian di atas, coba kamu tuliskan ciri-ciri suatu himpunan penyelesaian *SPL* dan hasilnya diskusikan secara klasikal.

Selanjutnya, dari semua penjelasan di atas, dapat kita tuliskan definisi himpunan penyelesaian sistem persamaan linear berikut ini.

Definisi 3.5

Penyelesaian sistem persamaan linear adalah nilai-nilai variabel yang memenuhi setiap persamaan linear pada sistem persamaan tersebut.

Definisi 3.6

Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear adalah himpunan semua penyelesaian sistem persamaan linear.

Sedangkan untuk *SPLDV* dan *SPLTV*, himpunan penyelesain sistem persamaan linear tersebut, berturut-turut didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.7

Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dengan dua variabel adalah himpunan semua pasangan terurut (x, y) yang memenuhi setiap persamaan linear pada sistem persamaan tersebut.

Definisi 3.8

Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dengan tiga variabel adalah himpunan semua pasangan terurut (x, y, z) yang memenuhi setiap persamaan linear pada sistem persamaan tersebut.

Uji Kompetensi 3.3

1. Tentukanlah himpunan penyelesaian setiap sistem persamaan linear berikut ini tanpa menggunakan cara aljabar, melainkan melalui metode grafik!

   a) $x - y = 3$
   $5x - 3y = 19$

   b) $3x - 2y = 1$
   $-x + 5y = 4$

   c) $2x - y = 0$
   $7x + 2y = 0$

   d) $4x - 1/2\, y = 3$
   $12x + 7y = 26$

2. Dengan menggunakan kertas berpetak, tentukanlah himpunan penyelesaian melalui grafik setiap sistem persamaan berikut ini!

   a) $3x + 2y = 7$
   $x + 3y = 7$

   b) $4x + y = 2$
   $3x + 2y = -1$

3. Tentukanlah himpunan penyelesaian dari:

   a) $4x + 2y = 5$
   $2x + 3y = \frac{15}{2}$

   b) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 1\frac{1}{6}$
   $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = -1\frac{1}{4}$

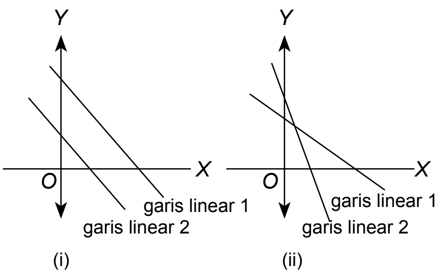
   c) $\frac{4}{x}x + \frac{3}{y}y = 11$
   $\frac{3}{x}x - \frac{4}{y}y = 2$

   d) $\frac{x+1}{4} - \frac{y-2}{2} = 6$
   $\frac{2x-2}{3} + \frac{3y-1}{6} = 7$

   e) $\frac{1}{x+3} - \frac{1}{y+1} = 6$
   $\frac{2}{x+3} + \frac{1}{2y+2} = 4$

4. Kembali perhatikan sistem persamaan linear dua variabel,
   $a_1x + b_1y = c_1$
   $a_2x + b_2y = c_2$
   Mungkinkah sistem tersebut tidak memiliki himpunan penyelesaian? Jika ya, tentukan syaratnya dan gambarkan!

5. Perhatikan kedua grafik sistem persamaan linear di bawah ini!



Gambar (i) dan (ii) merupakan grafik sistem persamaan linear dua variabel,

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

a) Tentukan syarat yang dimiliki sistem supaya memiliki grafik seperti gambar (i) dan (ii)!

b) Jelaskanlah perbedaan himpunan penyelesaian berdasarkan grafik (i) dan (ii)!

6. Tiga tukang cat, Joni, Deni, dan Ari, bekerja secara bersama-sama, dapat mengecat eksterior (bagian luar) sebuah rumah dalam waktu 10 jam kerja. Pengalaman Deni dan Ari pernah bersama-sama mengecat rumah yang serupa dalam 15 jam kerja. Suatu hari, ketiga tukang ini bekerja mengecat rumah serupa ini selama 4 jam kerja, setelah itu Ari pergi karena ada suatu keperluan mendadak. Joni dan Deni memerlukan tambahan waktu 8 jam kerja lagi untuk menyelesaikan pengecatan rumah. Tentukan waktu yang dibutuhkan tiap-tiap tukang, jika bekerja sendirian!

7. Sebuah bilangan terdiri atas tiga angka yang jumlahnya 9. Angka satuannya tiga lebih daripada angka puluhan. Jika angka ratusan dan angka puluhan ditukar letaknya, diperoleh bilangan yang sama. Tentukan bilangan tersebut!

8. Sebuah pabrik lensa memiliki 3 buah mesin A, B, dan C. Jika ketiganya bekerja, 5.700 lensa yang dapat dihasilkan dalam satu minggu. Jika hanya mesin A dan B bekerja, 3.400 lensa yang dihasilkan dalam satu minggu. Jika hanya mesin A dan C yang bekerja, 4.200 lensa yang dapat dihasilkan dalam satu minggu. Berapa banyak lensa yang dihasilkan oleh tiap-tiap mesin dalam satu minggu?

9. Selesaikan sistem persamaan yang diberikan dan tentukan nilai yang diminta.

a) x, y, dan z adalah penyelesaian sistem persamaan:

$$3x + 4y - 5z = 12$$
$$2x + 5y + z = 17$$
$$6x - 2y + 3z = 17$$

Tentukan nilai $x^2 + y^2 + z^2$

b) x, y, dan z adalah penyelesaian sistem persamaan:

$$x + 2y = -4$$
$$2x + z = 5$$
$$y - 3z = -6$$

Tentukan nilai $x.y.z$

c) jika $\frac{x}{4} + \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = 9$

$$\frac{3}{x} - \frac{4}{y} + \frac{2}{z} = 3$$
$$\frac{2}{x} + \frac{5}{y} - \frac{1}{z} = 5$$

Tentukan nilai $6xy$

d) jika $\dfrac{6}{x+2}+\dfrac{15}{y+3}+\dfrac{2}{z+1}=8$

$$\dfrac{4}{x+2}+\dfrac{5}{y+3}+\dfrac{3}{z+1}=6$$

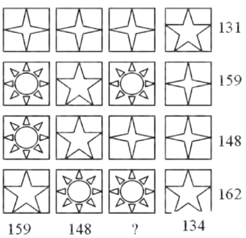
$$\dfrac{8}{x+2}-\dfrac{10}{y+3}+\dfrac{5}{z+1}=5$$

Tentukan nilai $x + y + z$

10. Diberikan sistem persamaan linear tiga variabel,

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Tentukan syarat yang harus dipenuhi sistem supaya memiliki solusi tunggal, memiliki banyak solusi, dan tidak memiliki solusi!

11. 

Setiap simbol pada gambar di atas mewakili sebuah bilangan. Jumlah bilangan pada setiap baris terdapat di kolom kanan dan jumlah bilangan setiap kolom terdapat di baris bawah. Tentukan bilangan pengganti tanda tanya.

12. Diketahui $\dfrac{xy}{x+y}=a$. $\dfrac{xz}{x+z}=b$ dan $\dfrac{yz}{y+z}=c$, dengan $a \neq 0$, $b \neq 0$, dan $c \neq 0$. Tentukan nilai x.

13. Jika $a + b + c = 0$ dengan $a, b, c \neq 0$, maka tentukan nilai

$$\left[a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right)\right]^2$$

14. Nilai-nilai a, b, dan c memenuhi persamaan-persamaan berikut

$$\frac{25ab}{a+b}=\frac{1}{2},\ \frac{15bc}{b+c}=-1, \text{ dan } \frac{5ac}{a+c}=-\frac{1}{3}.$$

Hitunglah nilai $(a - b)^c$.

15. 

Trisna bersama dengan Ayah dan Kakek sedang memanen tomat di ladang mereka. Pekerjaan memanen tomat itu dapat diselesaikan mereka dalam waktu 4 jam. Jika Trisna

bersama kakeknya bekerja bersama-sama, mereka dapat menyelesaikan pekerjaan itu dalam waktu 6 jam. Jika Ayah dan kakek menyelesaikan pekerjaan itu, maka akan selesai dalam waktu 8 jam. Berapa waktu yang diperlukan Trisna, Ayah, dan Kakek untuk menyelesaikan panenan tersebut, jika mereka bekerja sendiri-sendiri?

15. Diberi dua bilangan. Bilangan kedua sama dengan enam kali bilangan pertama setelah dikurangi satu. Bilangan kedua juga sama dengan bilangan pertama dikuadratkan dan ditambah tiga. Temukanlah bilangan tersebut.

4. Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Masalah-3.6

Pak Rendi berencana membangun 2 tipe rumah; yaitu, tipe *A* dan tipe *B* di atas sebidang tanah seluas 10.000 m^2. Setelah dia berkonsultasi dengan arsitek (perancang bangunan), ternyata untuk membangun sebuah rumah tipe *A* dibutuhkan tanah seluas 100 m^2 dan untuk membangun sebuah rumah tipe *B* dibutuhkan tanah seluas 75 m^2. Karena dana yang dimilikinya terbatas, maka banyak rumah yang direncanakan akan dibangun paling banyak 125 unit. Jika kamu adalah arsitek Pak Rendi,

1) bantulah Pak Rendi menentukan berapa banyak rumah tipe *A* dan tipe *B* yang mungkin dapat dibangun sesuai dengan kondisi luas tanah yang ada dan jumlah rumah yang akan dibangun
2) gambarkanlah daerah penyelesaian pada bidang kartesius berdasarkan batasan-batasan yang telah diuraikan.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan: x: banyak rumah tipe *A* yang akan dibangun
y: banyak rumah tipe *B* yang akan dibangun

1) Banyak rumah tipe *A* dan tipe *B* yang dapat dibangun
   a) Luas tanah yang diperlukan untuk membangun rumah tipe *A* dan tipe *B* di atas tanah seluas 10.000m2 ditentukan oleh pertidaksamaan:
   $100x + 75y \leq 10.1000$, pertidaksamaan ini disederhanakan menjadi:
   $4x + 3y \leq 400$ ....(1)

b) Jumlah rumah yang akan dibangun

$x + y \leq 125$ .... (2)

Dari pertidaksamaan (1) dan (2)), kita tentukan banyak rumah tipe A dan tipe B yang dapat dibangun dengan menerapkan metode eliminasi pada sistem persamaan linear dua variabel berikut.

$$\begin{array}{r|l} 4x+3y=400 & \times 1 \quad \rightarrow 4x+3y=400 \\ x+y=125 & \times 3 \quad \rightarrow 3x+3y=375\ - \\ \hline & \qquad\quad x = 25 \end{array}$$

untuk x = 25 maka y = 125 – x

y = 125 – 25

= 100

Dengan demikian, Pak Rendi dapat membangun rumah tipe A sebanyak 25 unit, dan rumah tipe B sebanyak 100 unit.

Diskusi

Diskusikanlah dengan teman-temanmu, bagaimana caranya untuk mencari banyak rumah tipe A dan tipe B yang dapat dibangun selain yang sudah kita temukan di atas sesuai dengan keterbatasan lahan yang tersedia.

Untuk menggambar daerah penyelesaian pada diagram kartesius dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

Langkah 1

Menggambar garis dengan persamaan $4x + 3y = 400$ dan garis $x + y = 125$. Agar kita mudah menggambar garis ini, terlebih dahulu kita cari titik potong dengan sumbu x yang terjadi jika $y = 0$ dan titik potong dengan sumbu y yang terjadi jika $x = 0$.

Untuk garis $4x + 3y = 400$, jika $y = 0$, maka $x = 100$.

jika $x = 0$, maka $y = 133{,}3$.

Maka garis $4x + 3y = 400$ memotong sumbu y di titik (0, 133,3) dan memotong sumbu y di titik (100, 0).

Untuk garis $x + y = 125$, jika $y = 0$ maka $x = 125$

jika $x = 0$ maka $y = 125$

Maka gari $x + y = 125$ memotong sumbu y di titik (0,125) dan memotong sumbu x di titik (125, 0).

Langkah 2

Menentukan daerah penyelesaian pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$ dan $x + y \leq 125$. Daerah penyelesaian pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$. Jika garis $4x + 3y = 400$ digambar

pada diagram kartesius maka garis tersebut akan membagi dua daerah, yaitu daerah $4x + 3y < 400$ dan daerah $4x + 3y > 400$.

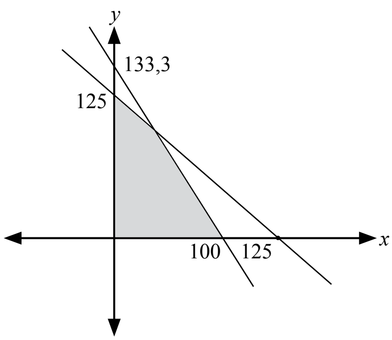
Selanjutnya menyelidiki daerah mana yang menjadi daerah penyelesaian dari pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$, dengan cara mengambil sebarang titik misal $P(x,y)$ pada salah satu daerah, kemudian mensubstitusikan titik tersebut ke pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$. Jika pertidaksamaan tersebut bernilai benar maka daerah yang memuat titik $P(x,y)$ merupakan daerah penyelesaiannya, jika bernilai salah maka daerah tersebut bukan daerah penyelesaian pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$. Dengan cara yang sama maka daerah penyelesaian pertidaksamaan $x + y \leq 125$ juga dapat diketahui.

Langkah 3

Mengarsir daerah yang merupakan daerah penyelesaian masing-masing pertidaksamaan. Daerah yang diarsir dua kali merupakan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linier.

Apakah kita perlu membatasi nilai $x > 0$ dan nilai $y > 0$? Mengapa? Berikan penjelasanmu.

Setelah langkah 1, 2, dan 3 di atas dilakukan, maka daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.7 Daerah penyelesaian untuk sistem pertidaksamaan linier

Dari Gambar 3.7, daerah yang diarsir merupakan daerah penyelesaian.

Contoh 3.10

Tentukan penyelesaian dari

$x + 3y \leq 6$ .... (1)

$3x + y \leq 10$ .... (2)

$x \geq 0$ .... (3)

$y \geq 0$ .... (4)

Alternatif Penyelesaian

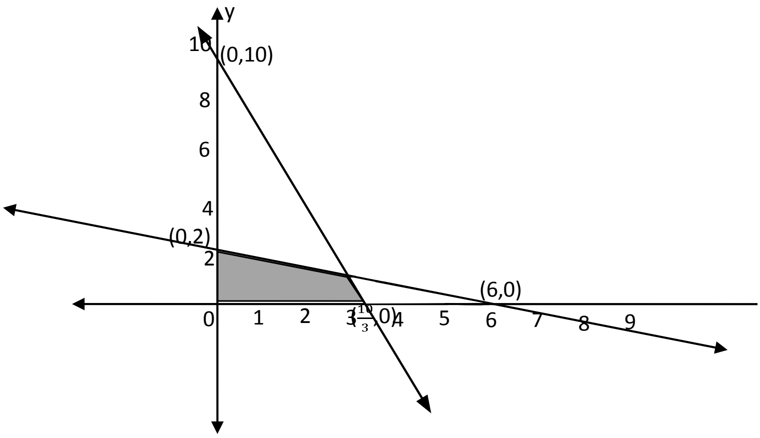
$x + 3y \leq 6$ .... (1)

$3x + y \leq 10$ .... (2)

$x \geq 0$ .... (3)

$y \geq 0$ .... (4)

gambarkan kedua pertidaksamaan di atas untuk menentukan titik potong grafik persamaaan $x + 3y = 6$ dan $3x + y = 10$. Selanjutnya arsir daerah yang merupakan daerah penyelesaian masing-masing pertidaksamaan. Daerah yang diarsir merupakan daerah penyelesaian.



Gambar 3.8 Daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linier x + 3y ≤ 6, 3x + y ≤ 10, x ≥ 0, y ≥ 0.

Definisi 3.9

1. Sistem pertidaksamaan linear adalah himpunan pertidaksamaan linear yang saling terkait dengan koefisien variabelnya bilangan-bilangan real.
2. Sistem pertidaksamaan linear dua variabel adalah suatu sistem pertidaksamaan linear yang memuat dua variabel dengan koefisien bilangan real.

Definisi 3.10

Penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dua peubah adalah himpunan semua pasangan titik (x,y) yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear tersebut.

Definisi 3.11

Daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear adalah daerah tempat kedudukan titik-titik yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear tersebut.

Uji Kompetensi 3.4

1. Gambarlah daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear berikut.
   a) $4x + 3y \leq 2$
      $x \geq 0$
      $y \geq 0$
   b) $4x - 5y \leq 20$
      $x \leq 0$
      $y \geq 0$
   c) $6x + 5y \leq 30$
      $2x - y \leq 4$
      $x \geq 0$
      $y \geq 0$

2. Gambarlah daerah himpunan penyelesaian berikut.
   $5x + 2y \leq 150$
   $x + y \leq 60$
   $x \geq 0$
   $y \geq 0$

3. Diberikan sistem pertidaksamaan linier:
   $x - y \geq 3$
   $5x + 3y \geq 9$
   a) Gambarkan grafik pertidaksamaan pada sistem tersebut!
   b) Tentukanlah himpunan penyelesaian sistem tersebut, dengan syarat tambahan $x > 0$ dan $y < 0$!
   c) Selanjutnya dapatkah kamu menentukan himpunan penyelesaian sistem tersebut untuk syarat $x < 0$ dan $y > 0$? Jelaskan!

4. Misalkan p adalah jumlah maksimum x dan y yang memenuhi sistem di bawah ini.
   $2x + 5y \leq 600$
   $4x + 3y \leq 530$
   $2x + y \leq 240$
   a) Gambarkanlah pertidaksamaan sistem linear tersebut!
   b) Tentukanlah nilai p!

5. Sekelompok tani transmigran mendapatkan 6 ha tanah yang dapat ditanami padi, jagung, dan palawija lain. Karena keterbatasan sumber daya petani harus menentukan berapa bagian yang harus ditanami padi dan berapa bagian yang harus ditanami jagung, sedangkan palawija lainnya ternyata tidak menguntungkan. Dalam suatu masa tanam tenaga yang tersedia hanya 1590 jam-orang. Pupuk juga terbatas, tak lebih dari 480 kg, sedangkan air dan sumber daya lainnya dianggap

cukup tersedia. Diketahui pula bahwa untuk menghasilkan 1 kuintal padi diperlukan 12 jam-orang tenaga dan 4 kg pupuk, dan untuk 1 kuintal jagung diperlukan 9 jam-orang tenaga dan 2 kg pupuk. Kondisi tanah memungkinkan menghasilkan 50 kuintal padi per ha atau 20 kuintal jagung per ha. Pendapatan petani dari 1 kuintal padi adalah Rp32.000,00 sedang dari 1 kuintal jagung Rp20.000,00 dan dianggap bahwa semua hasil tanamnya selalu habis terjual.

Masalah bagi petani ialah bagaimanakah rencana produksi yang memaksimumkan pendapatan total? Artinya berapa ha tanah ditanami padi dan berapa ha tanah ditanami jagung?

6. Jika diberikan sistem pertidaksamaan linear seperti berikut ini,
   $a_1x + b_1y \geq c_1$ dan $x \geq 0$
   $a_2x + b_2y \geq c_2$ dan $y \geq 0$.
   a) Apakah mungkin sistem pertidak samaan tersebut memiliki solusi tunggal?
   b) Syarat apakah yang harus dipenuhi agar sistem tidak memiliki solusi?

7. Suatu pabrik farmasi menghasilkan dua jenis kapsul obat flu yang diberi nama Fluin dan Fluon. Setiap kapsul memuat tiga unsur (*ingredient*) utama dengan kadar kandungannya tertera dalam Tabel 3.1. Menurut dokter, seseorang yang sakit flu akan sembuh jika dalam tiga hari (secara diratakan) minimum menelan 12 grain aspirin, 74 grain bikarbonat dan 24 grain kodein. Jika harga Fluin Rp200,00 dan Fluon Rp300,00 per kapsul, berapa kapsul Fluin dan berapa kapsul Fluon harus dibeli supaya cukup untuk menyembuhkannya dan meminimumkan ongkos pembelian total?

Unsur	Perkapsul	
	Fluin	Fluin
Aspirin	2	1
Bikarbonat	5	8
Kodein	1	6

Projek

Rancang tiga masalah nyata di seitarmu atau dari sumber lain (buku, internet dan lain-lain) yang model pemecahannya berupa sistem persamaan linear atau sistem pertidaksamaan linear. Formulasikan masalah tersebut dengan mendefinisikan variable-variabel terkait, menemukan persamaan atau pertidaksamaan yang menyatakan hubungan antara variable tersebut, selesaikan sistem yang kamu peroleh, dan interpretasikan hasilnya. Buat laporan hasil kerja dan sajikan di depan kelas

D. PENUTUP

Berberapa hal penting yang perlu dirangkum terkait konsep dan sifat-sifat sistem persamaan linear dan pertidaksamaan linear.

1. Model matematika dari permasalahan sehari-hari banyak ditemui yang berupa model sistem persamaan linear atau sistem pertidaksamaan linear. Konsep sistem persamaan linear dan sistem pertidaksamaan ini didasari oleh konsep persamaan dan pertidaksamaan atas sistem bilangan real, sehingga sifat-sifat persamaan linear dan pertidaksamaan linear atas sistem bilangan real banyak digunakan sebagai pedoman dalam menyelesaikan suatu sistem persamaan linear dan sistem pertidaksamaan linear.
2. Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear adalah himpunan semua nilai variabel yang memenuhi sistem persamaan tersebut.
3. Sistem persamaan linear disebut homogen apabila suku konstantanya adalah nol. Salah satu dari dua hal berikut dipenuhi.
   a. Sistem tersebut hanya mempunyai penyelesaian trivial.
   b. Sistem tersebut mempunyai tak berhingga banyaknya penyelesaian tak trivial selain penyelesaian trivial.
5. Sebuah sistem persamaan linear yang mempunyai penyelesaian dengan nilai variabel yang tidak semuanya nol disebut memiliki penyelesaian tak trivial.
6. Tafsiran geometris dari penyelesaian suatu sistem persamaan linear, diberikan sistem persamaan dengan 2 persamaan dan 2 variabel adalah sebagai berikut: $a_1x + b_1y = c_1$ dan $a_2x + b_2y = c_2$, dengan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 bilangan real, dengan a_1 dan b_1 tidak keduanya nol dan a_2 dan b_2 tidak keduanya nol.

Grafik persamaan-persamaan ini merupakan garis, misal garis g_1 dan garis g_2. Karena titik (x,y) terletak pada sebuah garis jika dan hanya jika bilangan-bilangan x dan y memenuhi persamaan tersebut, maka penyelesaian sistem persamaan linear tersebut akan bersesuaian dengan titik perpotongan garis g_1 dan garis g_2. Berdasarkan hal itu, maka terdapat tiga kemungkinan, yaitu

(a) garis g_1 dan garis g_2 sejajar dan tidak berpotongan, sehingga sistem tidak mempunyai penyelesaian.

(b) garis g_1 dan garis g_2 berpotongan pada satu titik, sehingga sistem hanya mempunyai tepat satu (tunggal) penyelesaian.

(c) garis g_1 dan garis g_2 berimpit, sehingga sistem mempunyai tak terhingga banyak penyelesaian.

7. Sistem Persamaan linear (*SPL*) mempunyai tiga kemungkinan penyelesaian, yaitu tidak mempunyai penyelesaian, mempunyai satu penyelesaian dan mempunyai tak terhingga banyak penyelesaian.

Penguasaan kamu tentang sistem persamaan dan pertidaksamaan linear adalah prasyarat mutlak mempelajari bahasan matriks dan program linear. Matriks adalah bentuk lain sebuah sistem persamaan linear, artinya setiap sistem persamaan linear dapat disajikan dalam bentuk matriks. Kita akan menemukan konsep dan sifat-sifat matriks melalui penyelesaian masalah nyata. Selanjutnya kita lakukan operasi hitung pada dua atau lebih matriks dan menentukan determinannya. Sifat-sifat matriks terhadap operasi penjumlahan, pengurangan dan perkalian akan dibahas secara mendalam dan dimanfaatkan dalam penyelesaian masalah matematika dan masalah otentik.

Catatan:

Bab 4

Matriks

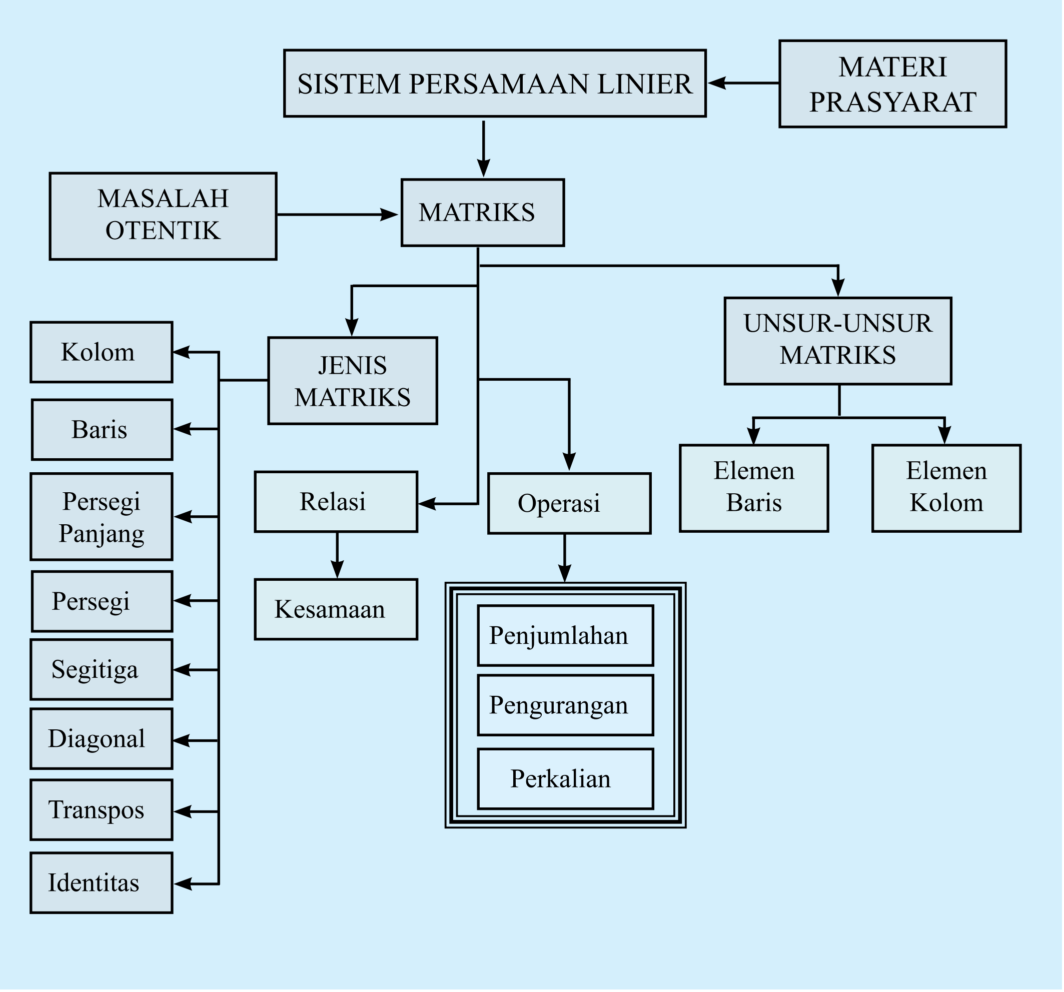
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran matriks, siswa mampu: 1. Mampu mentransformasi diri dalam berpilaku jujur, tangguh mengadapi masalah, kritis dan disiplin dalam melakukan tugas belajar matematika. 2. Menunjukkan sikap bertanggung jawab, rasa ingin tahu, jujur dan perilaku peduli lingkungan. 3. Mendeskripsikan konsep matriks sebagai representasi numerik dalam kaitannya dengan konteks nyata 4. Mendeskripsikan operasi sederhana matriks serta menerapkannya dalam pemecahan masalah 5. Menyajikan model matematika dari suatu masalah nyata yang berkaitan dengan matriks.	Melalui pembelajaran materi matriks, siswa memperoleh pengalaman belajar: • berlatih berpikir kritis dan kreatif; • mengamati keteraturan data; • berkolaborasi, bekerja sama menyelesaikan masalah; • berpikir Independen mengajukan ide secara bebas dan terbuka; • mengamati aturan susunan objek.

Istilah Penting

- *Elemen Matriks*
- *Ordo Matriks*
- *Matriks Persegi*
- *Matriks Identitas*
- *Transpos Matriks*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

Ketuntasan materi sistem persamaan dan pertidaksamaan linear merupakan materi prasyarat untuk mengkaji dan memahi materi matriks. Penyelesaian sistem persamaan linear (2, 3 variabel) dengan metode eliminasi, dan subsitusi akan diup-grade dengan konsep matriks, bahkan hingga n variabel. Keunggulan matriks, sekarang ini, banyak software matematika (seperti: *Microsoft Excel*, *Matlab*, *Maple*) menarapkan konsep matriks untuk menyelesaikan masalah nyata terkait matriks.
Untuk bab tiga ini, materi matriks dikaji sampai pengenalan operasi matriks dengan semesta pembicaraan himpunan bilangan real. Sedangkan materi lanjutannya akan diteruskan pada kelas XI.

1. Menemukan Konsep Matriks

Informasi yang terdapat dalam suatu koran atau majalah tidak senantiasa berupa teks bacaan yang terdiri atas sederetan kalimat yang membentuk paragraf, tetapi ada kalanya disampaikan dalam bentuk sebuah tabel. Tampilan informasi dalam suatu tabel lebih tersusun baik dibandingkan dalam bentuk paragraf. Hal seperti ini sering kita temui, tidak hanya sebatas pada koran atau majalah saja.

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak informasi atau data yang ditampilkan dalam bentuk tabel, seperti data rekening listrik atau telepon, klasemen akhir Liga Super Indonesia, data perolehan nilai dan absensi siswa, maupun brosur harga jual sepeda motor.

Sebagai gambaran awal mengenai materi matriks, mari kita cermati uraian berikut ini. Diketahui data hasil penjualan tiket penerbangan tujuan Medan dan Surabaya, dari sebuah agen tiket, selama empat hari berturut-turut disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 4.1: Penjualan tiket penerbangan ke Medan dan Surabaya

Tujuan	Hari ke			
	I	II	III	IV
Medan	3	4	2	5
Surabaya	7	1	3	2

Pada saat kamu membaca tabel di atas maka hal pertama yang perlu kamu perhatikan adalah kota tujuan, kemudian banyaknya tiket yang habis terjual untuk tiap-tiap kota setiap harinya. Data tersebut, dapat kamu sederhanakan dengan cara menghilangkan semua keterangan (judul baris dan kolom) pada tabel, dan mengganti tabel dengan kurung siku menjadi bentuk seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan bentuk tersebut, dapat kamu lihat bahwa data yang terbentuk terdiri atas bilangan-bilangan yang tersusun dalam baris dan kolom. Susunan bilangan seperti inilah yang dinamakan sebagai matriks.

Berikut ini akan kita cermati lebih dalam lagi mengenai matriks dari masalah-masalah kehidupan kita sehari-hari.

Masalah-4.1

Masihkah kamu ingat posisi duduk sewaktu kamu mengikuti Ujian Nasional SMP? Maksimal siswa dalam satu ruang ujian hanya 20 peserta, biasanya disusun dalam lima baris, empat kolom, seperti yang disajikan pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1 Pelaksanaan Ujian Nasional

Untuk memudahkan pengaturan peserta ujian dalam suatu ruangan, pihak sekolah menempatkan siswa dalam ruang ujian dengan pola nomor ujian melalui Nomor Induk Siswa (NIS), yang ditempelkan di tempat duduk siswa. Misalnya, nomor ujian peserta di ruang A adalah 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23,... , 44, 51, 52, 53, 54. Jika nomor peserta ujian adalah 12, itu berarti posisi peserta saat ujian berada pada baris ke-1 lajur ke-2, dan jika nomor ujian peserta adalah 34, artinya posisi peserta tersebut saat ujian berada pada baris ke-3 kolom ke-4. Demikian pula, jika nomor peserta ujian adalah 51, artinya posisi siswa saat ujian berada pada baris ke-5 kolom ke-1. Tentunya, untuk setiap peserta ujian yang memiliki nomor ujian 11, 12, 13, 14, 21, …, 53, dan 54 dengan mudah memahami posisi mereka dalam ruang ujian tersebut. Tentukan susunan peserta ujian ditinjau dari pola Nomor Induk Siswa (NIS)!

Alternatif Penyelesaian

Susunan peserta ujian jika dilihat dari NIS, dalam bentuk baris dan kolom, dapat kita nyatakan sebagai berikut.

Meja Pengawas Ujian

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \\ 51 & 52 & 53 & 54 \end{bmatrix}$$

Gambar 4.2. Denah posisi tempat duduk peserta ujian berdasarkan NIS

- Dari posisi duduk peserta ujian di atas, menurut kamu masih adakah cara lain untuk mentukan posisi tempat duduk peserta ujian?
  Bandingkan hasil yang kamu peroleh dengan yang diperoleh temanmu!

Masalah-4.2

Masalah lain yang terkait dengan susunan dapat kita amati susunan barang-barang pada suatu supermarket. Tentunya, setiap manager supermarket memiliki aturan untuk menempatkan setiap koleksi barang yang tersedia. Coba kita perhatikan gambar berikut ini!

KOLEKSI Peralatan Dapur	KOLEKSI Roti dan Biskuit	KOLEKSI Permen dan Coklat	KOLEKSI Mie Instan
KOLEKSI Sabun	KOLEKSI Sampho dan Pasta Gigi	KOLEKSI Detergen dan Pembersih	KOLEKSI Bumbu Dapur
KOLEKSI Minuman Botol	KOLEKSI Beras dan Tepung	KOLEKSI Susu	KOLEKSI Minyak dan Gula

Gambar 4.3 Ruang koleksi barang-barang pada suatu supermarket

Tentukanlah posisi koleksi beras dan tepung pada susunan di atas!

Alternatif Penyelesaian

Gambar di atas mendeskripsikan ruangan koleksi barang-barang suatu supermarket, yang terdiri atas tiga baris, 4 kolom. Posisi koleksi beras dan tepung terdapat pada baris ke-3, kolom ke-2. Posisi koleksi barang yang terdapat pada baris ke-2, kolom ke-4 adalah koleksi bumbu dapur.

- Coba kamu sebutkan posisi baris dan kolom setiap koleksi barang yang lain!
- Seandainya susunan koleksi barang-barang tersebut juga tersusun bertingkat, bagaimana matriks yang terbentuk?

Masalah-4.3

Seorang wisatawan lokal hendak berlibur ke beberapa tempat wisata yang ada di pulau Jawa. Untuk memaksimalkan waktu liburan, dia mencatat jarak antar kota-kota tersebut sebagai berikut.

Bandung–Bogor	126 km	Bandung–Semarang	367 km
Bandung–Cirebon	130 km	Bandung–Yogyakarta	428 km
Bandung–Surabaya	675 km	Bogor–Cirebon	256 km
Bogor–Surabaya	801 km	Cirebon–Yogyakarta	317 km
Bogor–Semarang	493 km	Surabaya–Semarang	308 km
Bogor–Yogyakarta	554 km	Surabaya–Yogyakarta	327 km
Cirebon–Surabaya	545 km	Semarang–Yogyakarta	115 km
Cirebon–Semarang	237 km		

Tentukanlah susunan jarak antar kota tujuan wisata, seandainya wisatawan tersebut memulai perjalanannya dari Bandung! Kemudian berikan makna setiap angka dalam susunan tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Wisatawan akan memulai perjalanannya dari Bandung ke kota-kota wisata di Pulau Jawa. Jarak-jarak antar kota tujuan wisata dituliskan sebagai berikut.

	Bandung	Cirebon	Semarang	Yogyakarta	Surabaya	Bogor
Bandung	0	130	367	428	675	126
Cirebon	130	0	237	317	545	256
Semarang	367	237	0	115	308	493
Yogyakarta	428	317	115	0	327	554
Surabaya	675	545	308	327	0	801
Bogor	125	256	493	554	801	0

Dari tampilan di atas, dia cukup jelas mengetahui jarak antar kota tujuan wisata. Jika kita ingin menampilkan susunan jarak-jarak tersebut, dapat dituliskan sebagai berikut.

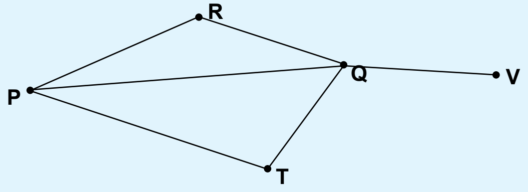
$$\begin{bmatrix} 0 & 130 & 367 & 428 & 675 & 126 \\ 130 & 0 & 237 & 317 & 545 & 256 \\ 367 & 237 & 0 & 115 & 308 & 493 \\ 428 & 317 & 115 & 0 & 327 & 554 \\ 675 & 545 & 308 & 437 & 0 & 801 \\ 126 & 256 & 493 & 554 & 801 & 0 \end{bmatrix}$$

Susunan jarak antar kota di pulau Jawa ini, terdiri dari 6 baris dan 6 kolom.

- Misalnya wisatawan memulai liburan dari yogyakarta dan selanjutnya berwisata ke satu kota wisata di masing-masing provinsi. Karena keterbatasan waktu dan dana wiasatawan ingin jarak terpendek untuk rute perjalanan. Coba berikan tawaran rute perjalanan terpendek untuk wisatawan tersebut.

Masalah-4.4

Pak Margono yang tinggal di kota *P* memiliki usaha jasa pengiriman barang. Suatu ketika, perusahaan pak Margono menerima order mengirim barang ke kota *V*. Jika setiap dua kota yang terhubungkan diberi bobot 1, sedangkan dua kota yang tidak terhubungkan diberi bobot 0. Nyatakanlah persoalan pengiriman barang tersebut dalam bentuk matriks.



Gambar 4.4 Diagram rute pengiriman barang

Alternatif Penyelesaian

Kata kunci pada persoalan ini adalah keterhubungan antar dua kota. Misalkan *i* dan *j* mewakili kota *P*, *Q*, *R*, *T*, dan *V* sehingga terdapat pembobotan berikut:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \text{ terhubung langsung dengan } j, i \neq j \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Dari gambar di atas, kota *P* terhubung langsung dengan semua kota, kecuali ke kota *V*. Keterhubungan antar dua kota ini, dapat kita nyatakan dalam bentuk matriks seperti berikut.

$$
X = \begin{array}{c} \\ P \\ R \\ Q \\ T \\ V \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} P & R & Q & T & V \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \text{Susunan angka-angka berbentuk persegi.}
$$

Representasi keterhubungan antar dua kota, disebut matriks X yang anggota-anggotanya terdiri dari angka 1 dan 0.

Dari empat masalah di atas, masalah yang dikaji adalah aturan susunan posisi setiap objek dan benda dinyatakan dalam aturan baris dan kolom. Banyak baris dan kolom dikondisikan pada kajian objek yang sedang diamati. Objek-objek yang disusun pada setiap baris dan kolom harus memiliki karakter yang sama.

Secara umum, matriks didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 4.1

Matriks adalah susunan bilangan yang diatur menurut aturan baris dan kolom dalam suatu susunan berbentuk persegipanjang. Susunan bilangan itu diletakkan di dalam kurung biasa "( )" atau kurung siku "[ ]".

Biasanya pelabelan suatu matriks dinyatakan dengan huruf kapital, misalnya A, B, C, D, ..., dan seterusnya. Secara umum, diberikan matriks A,

$$
A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \rightarrow \text{baris ke-1} \\ \rightarrow \text{baris ke-2} \\ \rightarrow \text{baris ke-3} \\ \\ \rightarrow \text{baris ke-}m \end{array}
$$

↓ kolom ke-n

↓ kolom ke-3

↓ kolom ke-2

↓ kolom ke-1

a_{ij} bilangan real, menyatakan elemen matriks pada baris ke-i dan kolom ke-j, $i = 1, 2, 3, .., m$; $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

$A_{m \times n}$: m menyatakan banyak baris matriks A.
n menyatakan banyak kolom matriks A.

Notasi $m \times n$, menyatakan ordo (ukuran) matriks A, yang menyatakan banyak baris dan kolom matriks A. Ingat, m menyatakan banyak baris dan n menyatakan banyak kolom matriks A. Jadi, jika diperhatikan ordo suatu matriks, dapat diketahui banyak elemen matriks itu.

Masalah-4.5

Tentukanlah matriks 4×4, dengan $A = [a_{ij}]$ yang memenuhi kondisi $a_{ij} = i^{(j-1)}$!

Alternatif Penyelesaian

$$\text{Matriks } A_{4\times4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},$$

- $a_{11} = 1^{1-1} = 1$
- $a_{12} = 1^{2-1} = 1$
- $a_{13} = 1^{3-1} = 1$
- $a_{14} = 1^{4-1} = 1$
- $a_{21} = 2^{1-1} = 1$
- $a_{22} = 2^{2-1} = 2$
- $a_{23} = 2^{3-1} = 4$
- $a_{24} = 2^{4-1} = 8$
- $a_{31} = 3^{1-1} = 1$
- $a_{32} = 3^{2-1} = 3$
- $a_{33} = 3^{3-1} = 9$
- $a_{34} = 3^{4-1} = 27$
- $a_{41} = 4^{1-1} = 1$
- $a_{42} = 4^{2-1} = 4$
- $a_{43} = 4^{3-1} = 16$
- $a_{44} = 4^{3-1} = 64$

Jadi, matriks A berordo 4×4 yang dimaksud adalah:

$$A_{4\times4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}.$$

Contoh 4.1

Teguh, siswa kelas X SMA Panca Budi, akan menyusun umur anggota keluarganya dalam bentuk matriks. Dia memiliki Ayah, Ibu, berturut-turut berumur 46 tahun dan 43 tahun. Selain itu dia juga memiliki kakak dan adik, secara berurut, Ningrum (22 tahun), Sekar (19 tahun), dan Wahyu (12 tahun). Dia sendiri berumur 14 tahun.

Berbekal dengan materi yang dia pelajari di sekolah dan kesungguhan dia dalam berlatih, dia mampu mengkreasikan susunan matriks, yang merepresentasikan umur anggota keluarga Teguh, sebagai berikut (berdasarkan urutan umur dalam keluarga Teguh).

i. Alternatif susunan I

$$T_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 46 & 43 & 22 \\ 19 & 14 & 12 \end{bmatrix}$$

Matriks $T_{2\times 3}$ adalah matriks persegipanjang dengan berordo 2×3.

ii. Alternatif susunan II

$$T_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 46 & 43 \\ 22 & 19 \\ 14 & 12 \end{bmatrix}$$

Matriks $T_{3\times 2}$ adalah matriks berordo 3×2.

- Dapatkah kamu menciptakan matriks, minimal dengan dua cara berbeda? Kamu perlu memikirkan cara lain yang lebih kreatif!

2. Jenis-Jenis Matriks

Contoh 4.1 di atas menyajikan beberapa variasi ordo matriks yang merepresentasikan umur anggota keluarga Teguh. Secara detail, berikut ini akan disajikan jenis-jenis matriks.

a. Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks yang terdiri atas satu baris saja. Biasanya, ordo matriks seperti ini, $1 \times n$, dengan n banyak kolomnya.

$T_{1\times 2}$ = $[46 \;\; 43]$, matriks baris berordo 1×2 yang merepresentasikan umur orang tua Teguh.

$T_{1\times 4}$ = $[22 \;\; 19 \;\; 14 \;\; 12]$, matriks baris berordo 1×4 yang merepresentasikan umur Teguh dan saudaranya.

b. Matriks Kolom

Matriks kolom adalah matriks yang terdiri atas satu kolom saja. Matriks kolom berordo $m \times 1$, dengan m banyak barisnya. Perhatikan matriks kolom berikut ini!

$T_{3\times1} = \begin{bmatrix} 43 \\ 22 \\ 19 \end{bmatrix}$, matriks kolom berordo 3×1, yang merepresentasikan umur semua wanita pada keluarga Teguh.

$T_{5\times1} = \begin{bmatrix} 46 \\ 43 \\ 22 \\ 19 \\ 12 \end{bmatrix}$, matriks kolom berordo 5×1, yang merepresentasikan umur kedua orang tua Teguh dan ketiga saudaranya.

c. Matriks Persegi

Matriks persegi adalah matriks yang mempunyai banyak baris dan kolom sama. Matriks ini memiliki ordo $n \times n$.

$T_{2\times2} = \begin{bmatrix} 46 & 43 \\ 22 & 19 \end{bmatrix}$, matriks persegi berordo 2×2, yang merepresentasikan umur orang tua Teguh dan kedua kakaknya.

Perhatikan matriks persegi berordo 4×4 di bawah ini.

$$H_{4\times4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Diagonal Samping matriks H

Diagonal Utama matriks H

Diagonal utama suatu matriks meliputi semua elemen matriks yang terletak pada garis diagonal dari sudut kiri atas ke sudut kanan bawah. Diagonal samping matriks meliputi semua elemen matriks yang terletak pada garis diagonal dari sudut kiri bawah ke sudut kanan atas.

d. Matriks Segitiga

Mari kita perhatikan matriks persegi F dan G berordo 4×4 di bawah ini. Jika terdapat pola susunan pada suatu matriks persegi, misalnya:

$$F_{4\times4} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 7 & 12 \\ 0 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

atau jika polanya seperti berikut ini.

$$G_{4\times4} = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 10 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga adalah matriks bujur sangkar yang elemen-elemen di bawah atau di atas elemen diagonal bernilai nol. Jika yang bernilai nol adalah elemen-elemen di bawah elemen diagonal utama maka disebut *matriks segitiga atas*, sebaliknya disebut *matriks segitiga bawah*. Dalam hal ini, juga tidak disyaratkan bahwa elemen diagonal utama harus bernilai tak nol.

e. Matriks Diagonal

Dengan memperhatikan konsep matriks segitiga di atas, jika kita cermati kombinasi pola tersebut pada suatu matriks persegi, seperti matriks berikut ini.

- $Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
- $B = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

maka matriks persegi dengan pola "semua elemennya bernilai nol, kecuali elemen diagonal utama", disebut matriks diagonal.

f. Matriks Identitas

Mari kita cermati kembali matriks persegi dengan pola seperti matriks berikut ini.

- $I_{4\times4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $I_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $I_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Cermati pola susunan angka 1 dan 0 pada ketiga matriks persegi di atas. Jika suatu matriks persegi semua elemen diagonal utamanya adalah 1 dan unsur yang lainnya semua nol disebut matriks identitas. Matriks identitas dinotasikan sebagai I berordo $n \times n$.

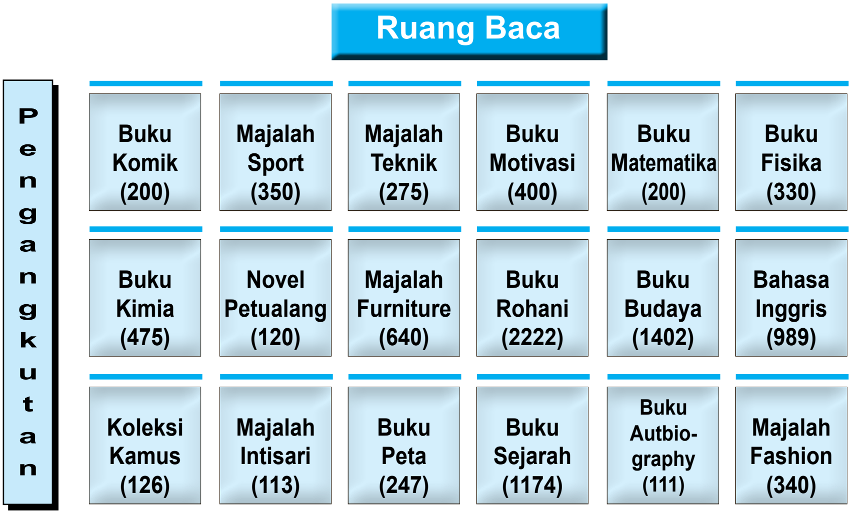
g. Matriks Nol

Jika semua elemen suatu matriks semuanya bernilai nol, seperti berikut:

- $O_{2\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, atau
- $O_{3\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, atau
- $O_{1\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, maka disebut matriks nol.

3. Transpos Matriks

Pak Susilo, pensiunan pegawai PLN, memiliki banyak koleksi buku, majalah, dan novel yang pernah dia beli maupun terima selama dia masih aktif sebagai pegawai PLN. Karena begitu banyak koleksi buku tersebut, ditambah lagi ruang koleksinya tidak memadai, Pak Susilo berniat akan menghibahkan semua buku-buku tersebut ke kampung halamannya, yaitu di Tegal. Sebelum dibawa pengangkutan, Parman, cucunya, membantu menyusun buku-buku tersebut dalam tumpukan-tumpukan seperti pada gambar di bawah ini.



Gambar 4.5. Diagram susunan koleksi buku-buku

Jika direpresentasikan semua koleksi tersebut dalam matriks, dengan sudut pandang dari ruang baca, akan diperoleh matriks persegi panjang berordo 3 × 6. Kita sebut matriks B,

$$B_{3\times 6} = \begin{bmatrix} 200 & 350 & 275 & 400 & 200 & 330 \\ 475 & 120 & 640 & 2222 & 1402 & 989 \\ 126 & 113 & 247 & 1174 & 111 & 340 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, karena halaman rumah Pak Susilo yang tidak cukup untuk ruang gerak truk sehingga truk harus diparkir di sebelah kiri ruang baca Pak Susilo. Pihak pengangkutan menyusun semua koleksi tersebut menurut barisan buku yang terdekat ke truk. Matriks B, berubah menjadi:

$$B_{6\times 3} = \begin{bmatrix} 200 & 475 & 126 \\ 350 & 120 & 113 \\ 275 & 640 & 247 \\ 400 & 2222 & 1174 \\ 200 & 1402 & 111 \\ 330 & 989 & 340 \end{bmatrix}$$

Dengan memperhatikan kedua matriks $B_{3\times 6}$ dan $B_{6\times 3}$, dalam kajian yang sama, ternyata memiliki relasi. Relasi yang dimaksud dalam hal ini adalah "perubahan posisi elemen matriks", atau disebut transpos matriks, yang diberi simbol B^t sebagai

transpos matriks B. Namun beberapa buku menotasikan transpos matriks B dengan $\overline{B}$ atau B'.

Perubahan yang dimaksud dalam hal ini adalah, setiap elemen baris ke-1 pada matriks B menjadi elemen kolom ke-1 pada matriks B^t, setiap elemen baris ke-2 pada matriks B menjadi elemen kolom ke-2 pada matriks B^t, demikian seterusnya, hingga semua elemen baris pada matriks matriks B menjadi elemen kolom pada matriks B^t. Hal inilah yang menjadi aturan menentukan transpos suatu matriks.

Contoh 4.2

a. Diberikan matriks $S = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$, maka transpos matriks S adalah

$$S^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 10 & 6 \\ 5 & 15 & 9 \\ 7 & 20 & 23 \end{bmatrix}$$

b. Jika $A = [-3 \;\; 4 \;\; 6 \;\; 8 \;\; 19]$, maka $A^t = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 19 \end{bmatrix}$

c. Jika $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 14 & 9 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 6 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \end{bmatrix}$, maka $C^t = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 8 & 12 \\ 3 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

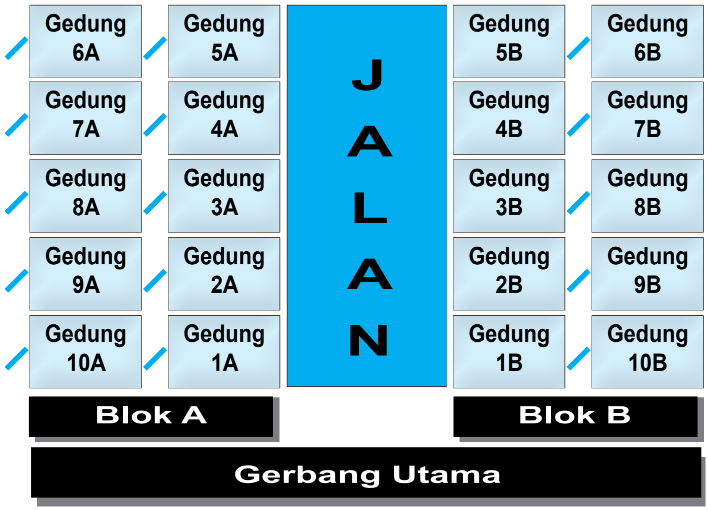
Dari pembahasan contoh di atas, dapat kita pahami perubahan ordo matriks. Misalnya, jika matriks awal berordo $m \times n$, maka transposnya berordo $n \times m$.

Coba kamu pikirkan…

- Mungkinkah suatu matriks sama dengan transposnya? Berikan alasanmu!
- Periksa apakah $(A^t + B^t) = (A + B)^t$, untuk setiap matriks A dan B berordo $m \times n$?

4. Kesamaan Dua Matriks

Dua kompleks perumahan ruko di daerah Tangerang memiliki ukuran yang sama dan bentuk bangunan yang sama. Gambar di bawah ini mendeskripsikan denah pembagian gedung-gedung ruko tersebut.



Gambar 4.6 Denah komplek ruko

Dari denah di atas dapat dicermati bahwa Blok A sama dengan Blok B, karena banyak Ruko di Blok A sama dengan banyak Ruko di Blok B. Selain itu, penempatan setiap Ruko di Blok A sama dengan penempatan Ruko di Blok B. Artinya 10 Ruko di Blok A dan Blok B dibagi dalam dua jajaran.

Dari ilustrasi di atas, kita akan mengkaji dalam konteks matriks. Dua matriks dikatakan sama jika memenuhi sifat berikut ini.

Definisi 4.2

Matriks A dan matriks B dikatakan sama ($A = B$), jika dan hanya jika:

i. Ordo matriks A sama dengan ordo matriks B.

ii. Setiap pasangan elemen yang seletak pada matriks A dan matriks B, $a_{ij} = b_{ij}$ (untuk semua nilai i dan j).

Contoh 4.3

Tentukanlah nilai a, b, c, dan d yang memenuhi hubungan $P^t = Q$, bila

$$P = \begin{bmatrix} 2a-4 & 3b \\ d+2a & 2c \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } Q = \begin{bmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Alternatif Penyelesaian

Diketahui matriks P berordo 3×2, maka matriks P^t berordo 2×3. Akibatnya, hubungan $P^t = Q$ dituliskan:

$$\begin{bmatrix} 2a-4 & d+2a & 4 \\ 3b & 2c & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

- Dengan menggunakan Definisi 4.2, coba kamu tentukan nilai a, b, c, dan d.

Contoh 4.4

Jika diberikan persamaan matriks berikut ini

$$\begin{pmatrix} \frac{2^{2x-y}}{32} & 4 & {}^{b}\log 16 \\ 2+3a & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & \frac{10}{y} \\ 4 & {}^{\sqrt{3}}\log(a+b)^2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

maka hitunglah nilai: $(a.b)$- $2x + y$.

Alternatif Penyelesaian

- Setelah menemukan hubungan kesamaan matriks, pilih pasangan elemen yang seletak yang pertama kali diselesaikan dengan tujuan mempermudah menentukan nilai variabel yang lain.
- Demikian juga untuk langkah yang kedua dan ketiga hingga ditemukan nilai a, b, x, dan y.

Uji Kompetensi 4.1

1. Diketahui matriks $M = [2\ \ 6\ \ 12\ \ 7\ \ 11]$ dan $N = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$. Dari matriks M dan N, tentukanlah :
   a. Elemen baris ke-1 kolom ke-3 matriks M!
   b. Elemen kolom ke-1 baris ke-5 matriks N!
   c. Hasil kali elemen baris ke-2 matriks N dengan elemen kolom ke-4 matriks M!
   d. Selisih elemen baris ke-6 pada matriks N dan elemen kolom ke-2 matriks M!
   e. Elemen baris ke-7 matriks N. Jelaskan!
2. Menurut kamu, apakah ada batasan banyak baris dan kolom untuk membentuk suatu matriks? Jelaskan!
3. Coba berikan contoh yang lain (selain yang disajikan di atas) mengenai matriks yang dapat dijumpai dalam kehidupan sehari-hari!
4. Buatlah matriks yang terdiri atas 5 baris dan 3 kolom, dengan semua elemennya adalah 15 bilangan prima pertama. Tentukan transposnya.
5. Jika elemen suatu matriks merupakan bilangan kuadrat, buatlah matriks yang terdiri dari 7 baris dan 2 kolom! Tentukan transposnya!
6. Tentukanlah matriks berordo 5 × 5, dengan aturan:
   $$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika } i - j > 1 \\ -1 & \text{jika } i - j \le 1 \end{cases}$$
7. Menurut ilmu kedokteran, terdapat relasi antara berat badan dengan tinggi badan seseorang. Bisakah kamu merepresentasikan persoalan tersebut ke dalam matriks? (Silahkan gunakan data berat badan dan tinggi badan teman sekelasmu)!
8. Jelaskan nilai kebenaran untuk setiap pernyataan berikut ini!
   a. Dua matriks yang berordo sama merupakan syarat perlu bagi dua matriks yang sama.
   b. Ordo matriks yang sama merupakan syarat cukup bagi dua matriks yang sama.

Petunjuk: Jika kamu belum paham arti syarat cukup dan syarat perlu, silahkan tanyakan kepada gurumu!

9. Masalah Penugasan Pengasuh Bayi. Sebuah biro jasa penyedia pengasuh bayi mempunyai empat klien dan lima pengasuh. Biro tersebut mengevaluasi tingkat kecocokan

antara klien dan pengasuh bayi dalam sebuah tabel dengan skala nol sampai sepuluh; nilai nol artinya klien tidak cocok dengan pengasuh bayi dan nilai sepuluh untuk klien yang sangat cocok dengan pengasuh. Tabel peringkat tersebut disajikan di bawah ini!

		Nama Pengasuh Bayi				
		Tarsi	Inem	Wati	Nurlela	Marni
Klien	Ibu Ratna	7	4	7	3	10
	Ibu Santi	5	9	3	8	7
	Ibu Bonita	3	5	6	2	9
	Ibu Soimah	6	5	0	4	8

Bagaimanakah biro jasa tersebut menugaskan pengasuh-pengasuhnya agar dapat memaksimumkan nilai kecocokan antara klien dan pengasuh?

10. Untuk matriks-matriks berikut, tentukan pasangan-pasangan matriks yang sama.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^t,$$

$$D = \begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \end{bmatrix}.$$

11. Diketahui matriks-matriks

$$T = \begin{bmatrix} -3a & a-2b \\ b+c & 2d+c \\ e-2d & e-3f \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$R = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 2 & 10 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Tentukan transpos matriks *T*!

b) Jika $R^t = T$, tentukanlah nilai a, b, c, d, e, dan f!

12. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$

dan matriks $X = \begin{bmatrix} r & s & t \\ u & v & w \end{bmatrix}$.

Syarat apakah yang harus dipenuhi supaya matriks *A* sama dengan matriks *X*? Jelaskan!

13. Pada tahun ajaran baru, Anas mewakili beberapa temannya untuk membeli 5 buku Matematika dan 4 buku Biologi. Dia harus membayar sebesar Rp410.000,00 Pada saat yang bersamaan, Samad mewakili teman-teman yang lainnya membeli 10 buku Matematika dan 6 buku Biologi. Samad harus membayar Rp740.000,00 untuk semuanya. Nyatakanlah persoalan tersebut dalam bentuk matriks dan selesaikanlah!

Projek

Temukan contoh penerapan matriks dalam ilmu komputer, bidang ilmu fisika, kimia, dan teknologi informasi. Selanjutnya coba terapkan berbagai konsep dan aturan matriks dalam menyusun buku teks di sebuah perpustakaan. Pikirkan bagaimana susunan buku teks, seperti: buku matematika, fisika, biologi, kimia, dan IPS dari berbagai jenisnya (misalnya jenis buku matematika, tersedia buku aljabar, geometri, statistika, dan lain-lain) tampak pada susunan baris dan kolom sebuah matriks. Kamu dapat membuat pengkodean dari buku-buku tersebut agar para pembaca dan yang mencari buku tertentu mudah untuk mendapatkannya. Buat laporan hasil kerja kelompokmu dan hasilnya disajikan di depan kelas.

5. Memahami Operasi Sederhana Matriks serta Menerapkannya dalam Pemecahan Masalah

a. Operasi Hitung pada Matriks

1) Penjumlahan Dua Matriks

Untuk memudahkan kita memahami penjumlahan dua matriks, mari kita cermati contoh masalah berikut ini.

Masalah-4.6

Sebuah perusahaan garmen memiliki dua pabrik yang berlokasi di Jakarta dan Surabaya. Perusahaan itu memproduksi dua jenis produk, yaitu baju dan jas. Biaya untuk bahan ditangani oleh sebuah departemen dan upah buruh ditangani oleh pabrik departemen lainnya. Biaya untuk setiap jenis produk diberikan pada matriks berikut.

Pabrik di Surabaya

Produk / Komponen Biaya	Baju	Jas
Bahan	Rp 200 juta	Rp 600 juta
Buruh	Rp 20 juta	Rp 80 juta

Pabrik di Jakarta

Produk / Komponen Biaya	Baju	Jas
Bahan	Rp 125 juta	Rp 450 juta
Buruh	Rp 25 juta	Rp 90 juta

Berapakah biaya masing-masing bahan dan upah buruh yang dikeluarkan oleh perusahaan tersebut untuk memproduksi baju dan jas?

Alternatif Penyelesaian

Jika kita misalkan matriks biaya di Surabaya sebagai matriks S dan matriks biaya di Jakarta sebagai matriks J, maka biaya total yang dikeluarkan oleh perusahaan untuk kedua pabrik tersebut dapat diperoleh, sebagai berikut.

- Total biaya bahan untuk baju = 200 + 125 = 325
- Total biaya bahan untuk jas = 600 + 450 = 1050
- Total biaya buruh untuk baju = 20 + 25 = 45
- Total biaya buruh untuk jas = 80 + 90 = 170

Jika keempat total biaya tersebut dinyatakan dalam matriks, adalah sebagai berikut:

Total Biaya Pabrik

Produk / Komponen Biaya	**Baju**	**Jas**
Bahan	Rp 425 juta	Rp 1050 juta
Buruh	Rp 45 juta	Rp 70 juta

Penjumlahan kedua matriks biaya di atas dapat dilakukan karena kedua matriks biaya memiliki ordo yang sama, yaitu 2×2. Seandainya ordo kedua matriks biaya tersebut berbeda, kita tidak dapat melakukan operasi penjumlahan terhadap kedua matriks. Jadi biaya yang dikeluarkan perusahaan untuk memproduksi baju adalah Rp470.000.000, dan untuk memproduksi jas adalah Rp1.120.000.000.

Nah, melalui pembahasan di atas, tentunya dapat didefinisikan penjumlahan dua matriks dalam konteks matematis.

Definisi 4.3

Misalkan A dan B adalah matriks berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen a_{ij} dan b_{ij}. Jika matriks C adalah jumlah matriks A dengan matriks B, ditulis $C = A + B$, matriks C juga berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen ditentukan oleh:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{(untuk semua } i \text{ dan } j\text{)}.$$

Catatan:

Dua matriks dapat dijumlahkan jika dan hanya jika memiliki ordo yang sama. Ordo matriks hasil penjumlahan dua matriks sama dengan ordo matriks yang dijumlahkan.

Contoh 4.5

a) Jika diketahui matriks $P = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka

$$P + Q = \begin{bmatrix} 10+2 & 2+2 & 4+8 \\ 1+1 & 3+0 & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Jika dimisalkan $R = P + Q$, maka jumlah matriks P dan Q adalah

$$R = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

b) Diketahui matriks $T = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, maka mari kita tunjukkan bahwa $T + O = T$ dan $O + T = T$.

Matriks O dalam hal ini adalah matriks nol berordo 3×3, karena matriks tersebut akan dijumlahkan dengan matriks T berordo 3×3 juga.

- $$T + O = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+0 & 3+0 & 1+0 \\ 5+0 & 5+0 & 0+0 \\ 1+0 & 3+0 & 7+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = T$$

- $$O + T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+6 & 0+3 & 0+1 \\ 0+5 & 0+5 & 0+0 \\ 0+1 & 0+3 & 0+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = T$$

Cermati! Meskipun pada Contoh 4.5 b) matriks nol tidak diberikan, secara intuitif matriks nol yang digunakan adalah matriks nol berordo 3×3. Demikian juga halnya untuk matriks identitas

2) Pengurangan Dua Matriks

Rumusan penjumlahan dua matriks di atas dapat kita terapkan untuk memahami konsep pengurangan matriks A dengan matriks B.

Matriks $-B$ dalam merupakan matriks yang elemennya berlawanan dengan setiap elemen yang bersesuaian dengan matriks B.

Misalkan A dan B adalah matriks-matriks berordo $m \times n$. Pengurangan matriks A dengan matriks B didefinisikan sebagai jumlah antara matriks A dengan lawan dari matriks $-B$, ditulis:

$$A - B = A + (-B).$$

Contoh 4.6

Mari kita cermati contoh berikut ini.

a) Jika $K = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ dan $L = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$, maka

$$K - L = K + (-L) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Diketahui matriks-matriks X, Y, dan Z sebagai berikut:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}, \text{ dan } Z = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{bmatrix}$$

Jika ada, tentukan pengurangan-pengurangan matriks berikut ini:

i) $Y - X$ ii) $Y - Z$ iii) $X - Z$.

Alternatif Penyelesaian

Matriks X dan Y memiliki ordo yang sama, yaitu berordo 3×2. Sedangkan matriks Z berordo 3×3. Oleh karena itu, menurut aturan pengurangan dua matriks, hanya bagian i) saja yang dapat ditentukan, ii) dan iii) tidak dapat dioperasikan, (mengapa?).

Jadi, $Y - X = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -7 \\ -9 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$

Dari contoh di atas, pengurangan dua matriks dapat juga dilakukan dengan mengurangkan langsung elemen-elemen yang seletak dari kedua matriks, seperti yang berlaku pada penjumlahan dua matriks, yaitu: $A - B = [a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}]$.

Diskusi

Operasi penjumlahan dikatakan bersifat komutatif jika $a + b = b + a$, untuk setiap a, b bilangan real.

- Dalam kajian matriks, apakah $A + B = B + A$?
- Bagaimana dengan operasi pengurangan dua matriks? Apakah $A - B = B - A$? Silahkan diskusikan!

3) Perkalian Suatu Bilangan Real dengan Matriks

Dalam aljabar matriks, bilangan real k sering disebut sebagai skalar. Oleh karena itu perkalian real terhadap matriks juga disebut sebagai perkalian skalar dengan matriks.

Secara umum, perkalian skalar dengan matriks dirumuskan sebagai berikut.

Definisi 4.4

Misalkan A adalah suatu matriks berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen a_{ij} dan k adalah suatu bilangan real. Matriks C adalah hasil perkalian bilangan real k terhadap matriks A, dinotasikan: $C = k.A$, bila matriks C berordo $m \times n$ dengan elemen-elemennya ditentukan oleh:

$$c_{ij} = k.a_{ij} \quad \text{(untuk semua } i \text{ dan } j\text{)}.$$

Sebelumnya, pada kajian pengurangan dua matriks, $A - B = A + (-B)$, $(-B)$ dalam hal ini sebenarnya hasil kali bilangan -1 dengan semua elemen matriks B. Artinya, matriks $(-B)$ dapat kita tulis sebagai:

$$-B = (-1).B.$$

Contoh 4.7

a) Jika $H = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, maka $2H = \begin{bmatrix} 2\times2 & 2\times3 \\ 2\times4 & 2\times5 \\ 2\times1 & 2\times2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

b) Jika $L = \begin{bmatrix} 12 & 30 & 15 \\ 0 & 24 & 18 \\ 3 & -3 & -12 \end{bmatrix}$, maka $\frac{1}{3}L = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\times 12 & \frac{1}{3}\times 30 & \frac{1}{3}\times 15 \\ \frac{1}{3}\times 0 & \frac{1}{3}\times 24 & \frac{1}{3}\times 18 \\ \frac{1}{3}\times 3 & \frac{1}{3}\times(-3) & \frac{1}{3}\times(-12) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 10 & 5 \\ 0 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

c) Jika M = $\begin{bmatrix} 12 & 24 & 36 \\ 48 & 60 & 72 \end{bmatrix}$, maka

$$\frac{1}{4}M + \frac{3}{4}M = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\times 12 & \frac{1}{4}\times 24 & \frac{1}{4}\times 36 \\ \frac{1}{4}\times 48 & \frac{1}{4}\times 60 & \frac{1}{4}\times 72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}\times 12 & \frac{3}{4}\times 24 & \frac{3}{4}\times 36 \\ \frac{3}{4}\times 48 & \frac{3}{4}\times 60 & \frac{3}{4}\times 72 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 18 & 27 \\ 36 & 45 & 54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 24 & 36 \\ 48 & 60 & 72 \end{bmatrix} = M.$$

Diskusi

Diskusikan dengan temanmu satu kelompok masalah berikut.
M suatu matriks berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen a_{ij}, *p* dan *q* adalah bilangan real. Jika *C* = (*p* + *q*) . *M*, maka matriks *C* berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen $c_{ij} = (p + q)a_{ij}$ untuk setiap *i* dan *j*. Tunjukan bahwa (*p* + *q*) *M* = *p* . *M* + *q* . *M*.

d) Diketahui matriks $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$. Jika $c = -1$, maka

$$c.(P - Q) = (-1).\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}\right) = -1.\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Diskusi

Diskusikan dengan temanmu satu kelompok bahwa jika *P* dan *Q* merupakan dua matriks berordo sama, dan *c* adalah bilangan real, maka *c* . (*P* – *Q*) = *c* . *P* – *c* . *Q*. Tentunya hasil *c* . (*P* – *Q*) sama dengan *c* . *P* – *c* . *Q*. Untuk matriks *P* dan *Q* berordo *m* × *n*, dan *c* suatu skalar, *c* bilangan real, silahkan diskusikan bahwa *c* . (*P* + *Q*) = *c* . *P* + *c* . *Q*.

e) Dengan menggunakan matriks $L = \begin{bmatrix} 12 & 30 & 10 \\ 0 & 24 & 18 \\ 6 & 8 & 16 \end{bmatrix}$ dan $p = 2$ dan $q = \frac{1}{2}$.

Kita dapat memahami bahwa:

$$q \times L = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 12 & 30 & 10 \\ 0 & 24 & 18 \\ 6 & 8 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 5 \\ 0 & 12 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Jika kita mengalikan p dengan $(q.L)$, maka kita akan peroleh:

$$p \times (q \times L) = 2 \times \begin{bmatrix} 6 & 15 & 5 \\ 0 & 12 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 30 & 10 \\ 0 & 24 & 18 \\ 6 & 8 & 16 \end{bmatrix}.$$

Karena p dan q adalah skalar, ternyata dengan mengalikan p dengan q terlebih dahulu, kemudian mengalikannya dengan matriks L, merupakan langkah lebih efektif untuk menyelesaikan $p\ .\ (q\ .\ L)$.

Sekarang, untuk matriks M berordo $m\ .\ n$, p dan q adalah skalar anggota Himpunan Bilangan Real, tunjukkan bahwa: $p\ .\ (q\ .\ L) = (p\ .\ q)\ .\ L$.

4) Perkalian Dua Matriks

Masalah-4.7

Suatu perusahaan yang bergerak pada bidang jasa akan membuka tiga cabang besar di pulau Sumatera, yaitu cabang 1 di kota Palembang, cabang 2 di kota Padang, dan cabang 3 di kota Pekanbaru. Untuk itu, diperlukan beberapa peralatan untuk membantu kelancaran usaha jasa tersebut, yaitu *handphone*, komputer, dan sepeda motor. Di sisi lain, pihak perusahaan mempertimbangkan harga per satuan peralatan tersebut. Lengkapnya, rincian data tersebut disajikan sebagai berikut.

	Handphone (unit)	Komputer (unit)	Sepeda Motor (unit)
Cabang 1	7	8	3
Cabang 2	5	6	2
Cabang 3	4	5	2

Harga *Handphone* (juta)	2
Harga Komputer (juta)	5
Harga Sepeda Motor (juta)	15

Berapakah total biaya pengadaan peralatan yang harus disediakan perusahaan di setiap cabang.

Alternatif Penyelesaian

Tidaklah sulit menyelesaikan persoalan di atas. Tentunya kamu dapat menjawabnya. Sekarang, kita akan menyelesaikan masalah tersebut dengan menggunakan konsep matriks.

Kita misalkan, matriks $C_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, yang merepresentasikan jumlah unit setiap peralatan yang dibutuhkan di setiap cabang, dan matriks $D_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}$, yang merepresentasikan harga per unit setiap peralatan.

Untuk menentukan total biaya pengadaan peralatan tersebut di setiap cabang, dilakukan perhitungan sebagai berikut.

- Cabang 1

  Total biaya = (7 unit *handphone* × 2 juta) + (8 unit komputer × 5 juta) + (3 unit sepeda motor ×15 juta).

  = Rp99.000.000,00
- Cabang 2

  Total biaya = (5 unit *handphone* × 2 juta) + (6 unit komputer × 5 juta) + (2 unit sepeda motor × 15 juta)

  = Rp70.000.000,00
- Cabang 3

  Total biaya = (4 unit *handphone* × 2 juta) + (5 unit komputer × 5 juta) + (2 unit sepeda motor × 15 juta)

  = Rp 63.000.000,00

Jadi, total biaya pengadaan peralatan di setiap cabang dinyatakan dalam matriks berikut:

$$E_{3\times1} = \begin{bmatrix} 99.000.000 \\ 70.000.000 \\ 63.000.000 \end{bmatrix}.$$

Cermati dari perkalian di atas.

Secara langsung, jika matriks $C_{3\times3} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ dikalikan $D_{3\times1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}$ maka dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.(2)+8.(5)+3.(15) \\ 5.(2)+6.(5)+2.(15) \\ 4.(2)+5.(5)+2.(15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99 \\ 70 \\ 63 \end{bmatrix} \text{(dalam satuan juta).}$$

Seandainya matriks D berordo 3×2, atau 3×3, bahkan $3 \times n$, perkalian D dan C masih dapat dilakukan.

Secara matematis, kita dapat menyatakan perkalian dua matriks sebagai berikut. Misalkan matriks $A_{n\times m}$ dan matriks $B_{p\times n}$, matriks A dapat dikalikan dengan matriks B jika banyak baris matriks A sama dengan banyak kolom matriks B. Hasil perkalian matriks A berordo $n \times m$ terhadap matriks B berordo $p \times n$ adalah suatu matriks berordo $m \times p$. Proses menentukan elemen-elemen hasil perkalian dua matriks dipaparkan sebagai berikut.

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ dan } B_{n\times p} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

Jika C adalah matriks hasil perkalian matriks $A_{m\times n}$ dan matriks $B_{n\times p}$, dinotasikan $C = A \times B$, maka

- Matriks C berordo $m \times p$.
- Elemen-elemen matriks C pada baris ke-i dan kolom ke-j, dinotasikan c_{ij}, diperoleh dengan cara mengalikan elemen baris ke-i matriks A dan elemen kolom ke-j matriks B, kemudian dijumlahkan. Dinotasikan

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + a_{i3}.b_{3j} + \ldots + a_{in}.b_{nj}$$

Mari kita pelajari contoh-contoh di bawah ini, untuk memudahkan kita mengerti akan konsep di atas!

Contoh 4.8

a) Diketahui matriks $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, dan $B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$,

matriks hasil perkalian matriks A dan matriks B,

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13}.b_{31} & a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} + a_{13}.b_{32} & a_{11}.b_{13} + a_{12}.b_{23} + a_{13}.b_{33} \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} + a_{23}.b_{31} & a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} + a_{23}.b_{32} & a_{21}.b_{13} + a_{22}.b_{23} + a_{23}.b_{33} \\ a_{31}.b_{11} + a_{32}.b_{21} + a_{33}.b_{31} & a_{31}.b_{12} + a_{32}.b_{22} + a_{33}.b_{32} & a_{31}.b_{13} + a_{32}.b_{23} + a_{33}.b_{33} \end{bmatrix}$$

♦ Sekarang, tentukan hasil perkalian matriks B dan matriks A. Kemudian, simpulkan apakah berlaku atau tidak berlaku sifat komutatif pada perkalian matriks? Berikan alasanmu!

b) Mari kita tentukan hasil perkalian matriks $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,

dengan menggunakan konsep perkalian dua matriks di atas, diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2+2.1 & 1.3+2.2 & 1.4+2.0 \\ 3.2+4.1 & 3.3+4.2 & 3.4+4.0 \\ 5.2+6.1 & 5.3+6.2 & 5.4+6.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 4 \\ 10 & 17 & 12 \\ 16 & 27 & 20 \end{bmatrix}.$$

♦ Dengan menggunakan hasil diskusi yang kamu peroleh pada contoh a), periksa apakah matriks $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ dapat dikalikan dengan matriks $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$? Berikan penjelasanmu!

Contoh 4.9

Tentukan nilai a dan b sedemikian $A^2 = a.A + b.I$, bila $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Alternatif Penyelesaian

Perlu kamu ketahui $A^2 = A.\ A$, sama dengan konsep yang berlaku pada aljabar.

Karena $A^2 = a.A + b.I$, maka berlaku:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = a.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + b.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

♦ Untuk memantapkan keterampilanmu dalam mengalikan dua matriks, teruskan langkah penyelesaian contoh ini hingga kamu temukan nilai a dan b.

Uji Kompetensi 4.2

1. Misalkan A dan B adalah matriks-matriks berordo 4×5 dan C, D, dan E berturut-turut adalah matriks-matriks berordo 5×2, 4×2, dan 5×4. Tentukanlah yang mana diantara ungkapan matriks di bawah ini yang terdefinisi. Jika ada, tentukanlah ukuran matriks tersebut!

   (a) BA (d) $AB + B$
   (b) $AC + D$ (e) $E(A + B)$
   (c) $AE + B$ (f) $E(AC)$

2. Tentukanlah hasil perkalian matriks-matriks berikut!

   a) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

   b) $6 \times \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 8 & 8 & 10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

3. Apa yang dapat kamu jelaskan dengan operasi pembagian pada matriks? Misalnya, jika diketahui matriks $A \times X = B$, dengan matriks A dan B yang diketahui. Bagaimana kita menentukan matriks X?

   Paparkan hasil kerjamu di depan kelas!

4. Berikan contoh permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang menerapkan konsep perkalian matriks! (Selain konteks persoalan yang sudah disajikan pada buku ini).

5. Diketahui matriks-matriks

   $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$,

   $C = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^t$

   dan $F = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}^t$.

   Dari semua matriks di atas, pasangan matriks manakah yang dapat dijumlahkan dan dikurangkan. Kemudian selesaikanlah!

6. Jika $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$,

   dan X suatu matriks berordo 2×3 serta memenuhi persamaan $A + X = B$. Tentukan matriks X!

7. Tentukanlah nilai p, q, r, dan s pada persamaan matriks berikut!

   $$5\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -15 & 14 \end{bmatrix}$$

8. Diketahui kesamaan matriks:

$$\begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} + 3T = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 16 & 20 \end{bmatrix}$$

Tentukan matriks T.

9. Diketahui matriks-matriks:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, dan

$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$.

Jika $F(X, Y, Z)$ didefinisikan sebagai $F(X, Y, Z) = 4X - 2Y + Z$.
Tentukanlah
i. $F(A, B, C)$!
ii. $F(2A, 3B, 2C)$!

10. Diketahui matriks $G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$,

kemudian diberikan matriks-matriks berikut:

$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$J = G^t$, $K = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ dan $L = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Matriks manakah yang dapat dikalikan dengan matriks G? Kemudian tentukan hasilnya!

11. Untuk setiap matriks A dan B adalah matriks persegi. Tentukanlah nilai kebenaran setiap pernyataan di bawah ini!

a) Jika elemen kolom ke-1 matriks A semuanya nol, maka elemen kolom ke-1 matriks AB juga semuanya nol.
b) Jika elemen pada baris ke-1 pada matriks A semuanya nol, maka elemen baris ke-1 matriks AB juga semuanya nol.

12. Berikan dua matriks A dan dua matriks B yang memenuhi kesamaan: $(A + B)^t = (A^t + B)$.

13. Berikan dua matriks A dan dua matriks B yang memnuhi kesamaan matriks berikut

a) $(A + B)^2 = A^2 + B^2$
b) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

14. Jika matriks $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, maka tentukanlah $C^3 - 4C^2 + C - 4I$, dengan matriks I merupakan matriks identitas berordo 3×3.

15. Tentukanlah nilai x dan y yang memenuhi syarat berikut ini!

a) $G = \begin{bmatrix} y & 1 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ dan $G^2 = I$

b) $Y = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ dan $F^2 = x.F + y.I$

I adalah matriks identitas berordo 2×2.

D. PENUTUP

Setelah selesai membahas materi matriks, ada beberapa hal penting sebagai kesimpulan yang dijadikan pegangan dalam mendalami dan membahas materi lebih lanjut, antara lain:

1. Matriks adalah susunan bilangan-bilangan real dalam baris dan kolom.
2. Sebuah matriks A ditransposkan menghasilkan matriks A^t dengan elemen baris matriks A berubah menjadi elemen kolom matriks A^t. Dengan demikian matriks A^t ditransposkan kembali, hasilnya menjadi matriks A atau $(A^t)^t = A$.
3. Jumlah sebarang matriks dengan matriks nol adalah matriks itu sendiri.
4. Dalam operasi penjumlahan dua matriks berlaku sifat komutatif dan assosiatif, yaitu jika *A, B,* dan *C* adalah matriks, maka
   a. $A + B = B + A$
   b. $A + (B + C) = (A + B) + C$
5. Hasil kali sebuah matriks dengan suatu skalar atau suatu bilangan real k adalah sebuah matriks baru yang berordo sama dan memiliki elemen-elemen k kali elemen-elemen dari matriks semula.
6. Dua matriks hanya dapat dikalikan apabila banyaknya kolom matriks yang dikali sama dengan banyaknya baris matriks pengalinya.
7. Hasil perkalian matriks A dengan matriks identitas adalah matriks A.
8. Perkalian dua matriks tidak memenuhi sifat komutatif. Tetapi perkalian matriks dengan skalar memenuhi sifat komutatif dan assosiatif. Misal jika k adalah skalar, A, dan B adalah matriks maka berlaku.
   a. $k \, . \, A = A \, . \, k$
   b. $k \, . \, (A \pm B) = k \, . \, A \pm k.B$
9. Hasil kali dua matriks menghasilkan sebuah matriks baru, yang elemen-elemennya merupakan hasil perkalian elemen baris matriks A dan elemen kolom matriks B. Misal jika $A_{p\times q}$ dan $B_{q\times r}$ adalah dua matriks, maka berlaku $A_{p\times q} \times B_{q\times r} = C_{p\times r}$.

Materi matriks merupakan syarat mutlak untuk mempelajari materi program linear. Untuk mempelajari program linear, diperlukan tambahan konsep determinan dan invers matriks. Program linear adalah salah metode menyelesaikan masalah nyata yang terkait dengan tujuan memaksimumkan atau meminimumkan suatu fungsi tujuan dengan kendala yang terkait.

Catatan:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bab 5

Relasi dan Fungsi

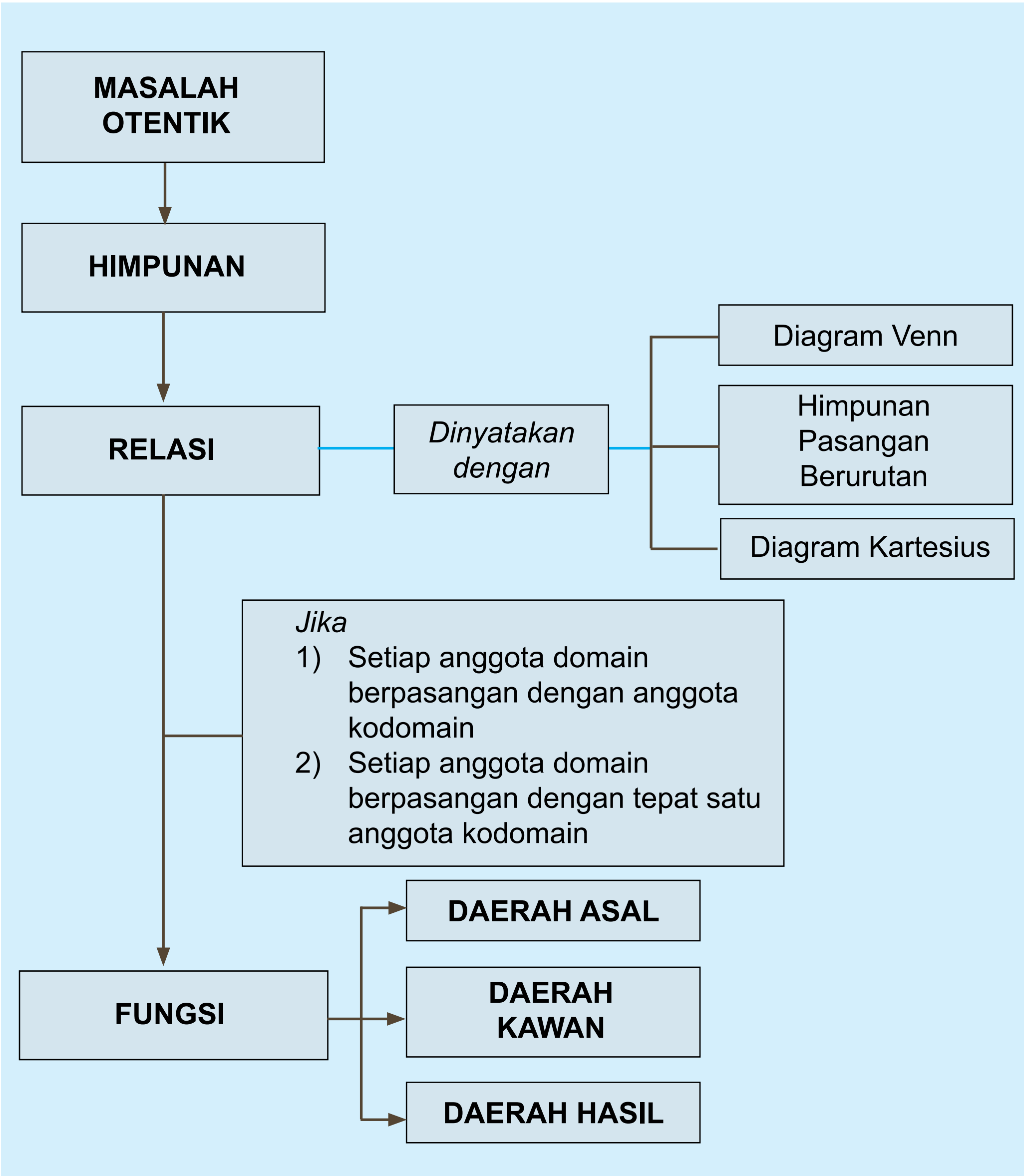
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu: 1. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah. 2. Mendeskripsikan daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil suatu relasi antara dua himpunan yang disajikan dalam berbagai bentuk (grafik, himpunan pasangan terurut, atau ekspresi simbolik) 3. Mengidentifikasi relasi yang disajikan dalam berbagai bentuk yang merupakan fungsi. 4. Menerapkan daerah asal, dan daerah hasil fungsi dalam menyelesaikan masalah.	Melalui pembelajaran relasi dan fungsi siswa memperoleh pengalaman belajar: • menemukan konsep relasi dan fungsi melalui pemecahan masalah otentik; • berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial-kultural; • berpikir tingkat tinggi dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep relasi dan fungsi dalam memecahkan masalah otentik; • menjelaskan konsep daerah asal (domain), daerah kawan (kodomain), dan daerah hasil (range) suatu relasi; • menyatakan sebuah relasi dengan diagram panah, himpunan pasangan terurut, dan diagram venn; • menemukan sifat-sifat relasi; • menuliskan dengan kata-katanya sendiri konsep relasi berdasarkan sifat-sifat yang dituliskan sebelumnya; • menjelaskan konsep daerah asal (domain), daerah kawan (kodomain), dan daerah hasil (range) suatu fungsi; • menyatakan sebuah fungsi dengan diagram panah, himpunan pasangan terurut, dan diagram venn; • menggunakan konsep dan prinsip relasi dan fungsi untuk memecahkan masalah otentik.

Istilah Penting

- *Relasi*
- *Fungsi*
- *Daerah asal (domain)*
- *Daerah kawan (kodomain)*
- *Daerah hasil (range)*

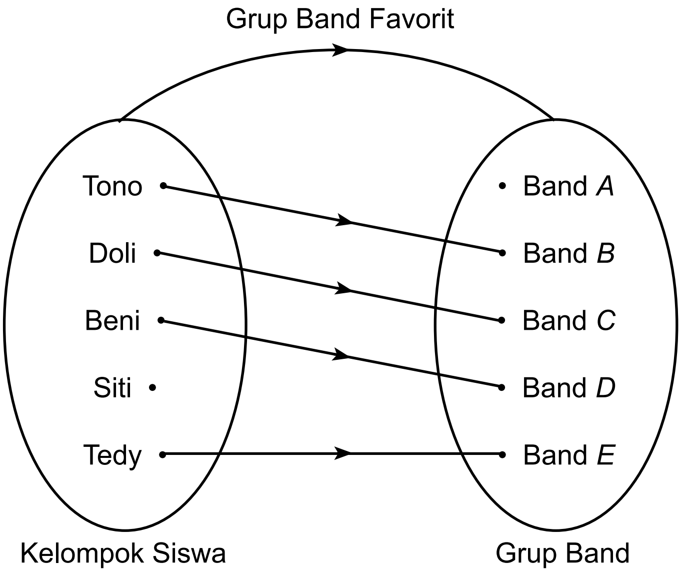
B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Menemukan Konsep Relasi

Gambar di bawah menyatakan hubungan antara kelompok siswa dengan kelompok grup band favoritnya.



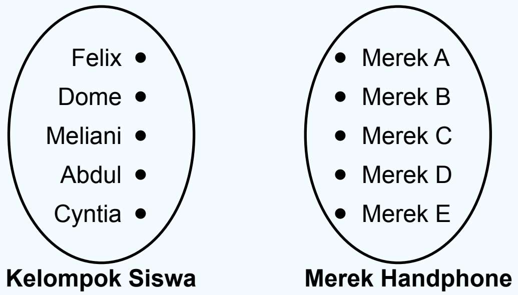
Gambar 5.1 Grup band favorit sejumlah siswa

Dari gambar di atas, tanpa ada penjelasan yang lebih terinci dapat ditemukan fakta-fakta berikut.

(1) Grup band favorit Tono adalah Band *B*.
(2) Grup band favorit Doli adalah Band *C*.
(3) Grup band favorit Beni adalah Band *D*.

- Selain ketiga fakta di atas, temukanlah fakta-fakta lain yang berhubungan dengan Gambar 5.1.
- Diskusikan dengan temanmu mengapa kita bisa menduga fakta-fakta tersebut?

Bandingkan dengan gambar berikut.



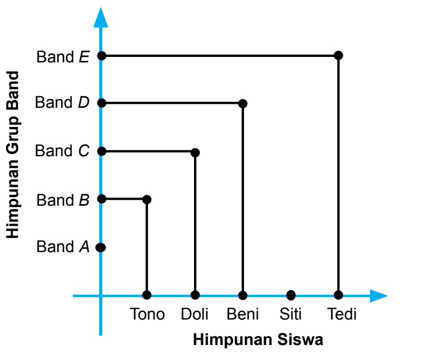
Gambar 5.2 Kelompok siswa dan merek handpone

Perhatikan kedua gambar di atas, dari Gambar 5.1 dapat ditemukan beberapa hal karena ada garis panah yang menghubungkan kelompok siswa dengan kelompok grup band, dengan aturan menghubungkan adalah: 'Grup band favorit'. Pada gambar 5.2 kita tidak dapat menemukan hubungan antara kelompok siswa dengan merek handpone yang ada karena tidak ada garis panah yang menghubungkan antara kelompok siswa dengan kelompok merek handpone.

Aturan yang menghubungkan kelompok siswa dengan kelompok grup band pada Gambar 5.1 disebut relasi antara kelompok siswa dengan grup band, relasinya adalah 'grup band favorit'. Relasi yang disajikan pada Gambar 5.1 di atas ditandai dengan sebuah garis panah dari kelompok siswa menuju kelompok grup band favorit, relasi seperti ini biasa disebut relasi yang dinyatakan dengan diagram panah. Selain dengan diagram panah. Relasi dapat juga dinyatakan dengan himpunan pasangan terurut dan dengan menggunakan diagram kartesius seperti berikut.

Relasi pada Gambar 5.1 di atas jika dinyatakan dengan himpunan pasangan terurut ditunjukkan sebagai berikut.

Himpunan pasangan berurutan kelompok siswa dengan grup band favoritnya adalah: {(Tono, Band *B*), (Doli, Band *C*), (Beni, Band *D*), (Tedy, Band *E*)}. Jika dinyatakan dengan diagram kartesius hasilnya ditunjukkan seperti Gambar 5.3 di samping.



Gambar 5.3 Relasi grup band favorit

Untuk memahami pengertian relasi, perhatikan masalah berikut.

Masalah-5.1

Dalam rangka memperingati HUT RI ke- 68 di Kabupaten Sorong, SMA Negeri 1 Sorong akan mengirimkan siswanya untuk mengikuti pertandingan antar siswa SMA pada pertandingan tenis lapangan, bola voli, bola kaki, *badminton*, tenis meja, dan catur. Terdapat 6 siswa (Udin, Joko, Dayu, Siti, Beni, dan Tono) yang akan mengikuti pertandingan tersebut. Sekolah membuat dua alternatif pilihan dalam menentukan pertandingan yang akan diikuti oleh keenam siswa tersebut. Kedua pilihan itu adalah:

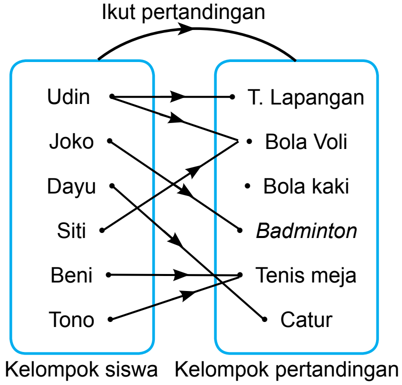
1) Udin ikut pertandingan tenis lapangan dan bola voli, Joko ikut pertandingan *badminton*, Dayu ikut pertandingan catur, Siti ikut pertandingan bola voli, Beni ikut pertandingan tenis meja, dan Tono ikut pertandingan tenis meja.
2) Dayu dan Siti mengikuti pertandingan bola voli, Joko dan Udin mengikuti pertandingan bola kaki, Tono mengikuti pertandingan tenis meja, dan Beni mengikuti pertandingan catur.

Jika pilihan sekolah adalah butir (1), pasangkanlah siswa dengan jenis pertandingan yang akan diikuti menggunakan diagram panah, pasangan terurut, dan diagram kartesius.

Alternatif Penyelesaian

Alternatif penyelesaian masalah ditunjukkan sebagai berikut.

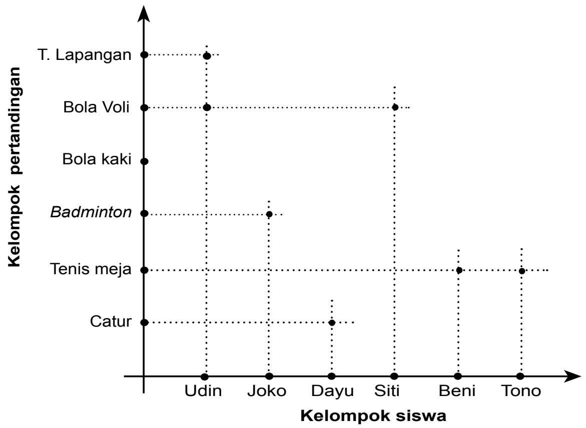
1) Dengan menggunakan pilihan butir (1), pasangan siswa dengan jenis pertandingan yang dikuti sebagai berikut.
   a) Dengan diagram panah



Gambar 5.4 Pasangan siswa dengan pertandingan yang diikuti

b) Dengan himpunan pasangan terurut
Himpunan pasangan terurut: {(Udin, tenis lapangan), (Udin, bola volley), (Joko, badminton), (Dayu, catur), (Siti, bola volley), (Beni, tenis meja), (Tono, tenis meja)}

c) Dengan diagram kartesius



Gambar 5.5 Deskripsi pasangan siswa dengan jenis pertandingan yang diikuti

2) Sebagai latihanmu, cara yang sama dengan butir (1) pasangkanlah siswa dengan jenis pertandingan yang diikuti jika pilihan sekolah menggunakan pilihan butir (2).

Berdasarkan contoh dan alternatif penyelesaian masalah di atas, ditemukan definisi relasi sebagai berikut.

Definisi 5.1

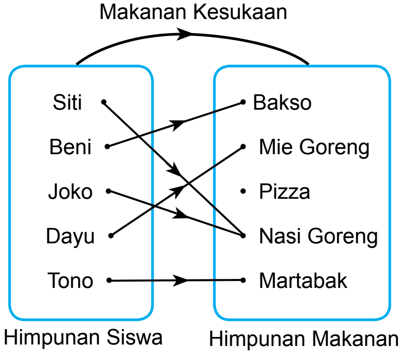
Misalkan *A* dan *B* adalah himpunan. Relasi dari *A* ke *B* adalah aturan pengaitan/pemasangan anggota-anggota *A* dengan anggota-anggota *B*.

Catatan:

1) Relasi dapat terbentuk apabila terdapat dua himpunan/kelompok yang memiliki anggota yang akan dipasangkan satu dengan yang lain. Pada Gambar 5.1, himpunan pertama yaitu himpunan siswa dan himpunan kedua yaitu himpunan grup band. Pada Masalah-5.1, himpunan pertama yaitu himpunan siswa SMA Negeri 1 Sorong yang akan mengikuti pertandingan dan himpunan kedua yaitu himpunan cabang olah raga yang akan dipertandingkan.

2) Relasi dapat terbentuk apabila ada aturan yang mengaitkan antara anggota himpunan yang satu dengan anggota himpunan yang lain. Pada Gambar 5.1, nama siswa terhubung dengan grup band favoritnya. Pada Masalah-5.1, siswa yang akan bertanding dihubungkan dengan jenis pertandingan yang akan diikuti.

Perhatikan Masalah 5.1 untuk point (1), terlihat bahwa tanda panah mengarah dari anggota himpunan siswa yang akan ikut bertanding ke anggota himpunan pertandingan yang akan di ikuti. Himpunan yang anggotanya akan dipasangkan pada Masalah 5.1 yaitu himpunan siswa disebut daerah asal (*domain*). Himpunan pertandingan yang akan diikuti disebut daerah kawan (*kodomain*). Himpunan yang anggotanya adalah anggota daerah kawan yang memiliki pasangan di daerah asal disebut daerah hasil (*range*), perhatikan Gambar 5.6 berikut ini.



Gambar 5.6 Pasangan siswa dengan makanan kesukaan

Dari Gambar 5.6 di atas diperoleh data berikut.

- Relasi himpunan siswa dengan himpunan makanan adalah ‘makanan kesukaan’.
- Makanan kesukaan Siti dan Joko adalah nasi goreng.
- Makanan kesukaan Beni adalah bakso.
- Makanan kesukaan Dayu adalah mie goreng.
- Makanan kesukaan Tono adalah martabak.

Berdasarkan Gambar 5.6, himpunan siswa disebut daeral asal, himpunan makanan disebut daerah kawan, dan himpunan yang anggotanya adalah anggota daerah kawan yang memiliki pasangan dengan anggota daerah asal disebut daerah hasil, ditulis sebagai berikut.

- Daerah asal: {Siti, Beni, Joko, Dayu, Tono}
- Daerah kawan: {bakso, mie goreng, pizza, nasi goreng, martabak}
- Daerah hasil: {bakso, mie goreng, nasi goreng, martabak}

Masalah-5.2

Salah satu upaya pemerintah daerah DKI Jakarta untuk mengurangi kemacetan adalah dengan menaikkan biaya parkir mobil di sepanjang jalan Jenderal Sudirman di Jakarta. Biaya parkir terbaru yang dikeluarkan pemda ditunjukkan pada tabel berikut.

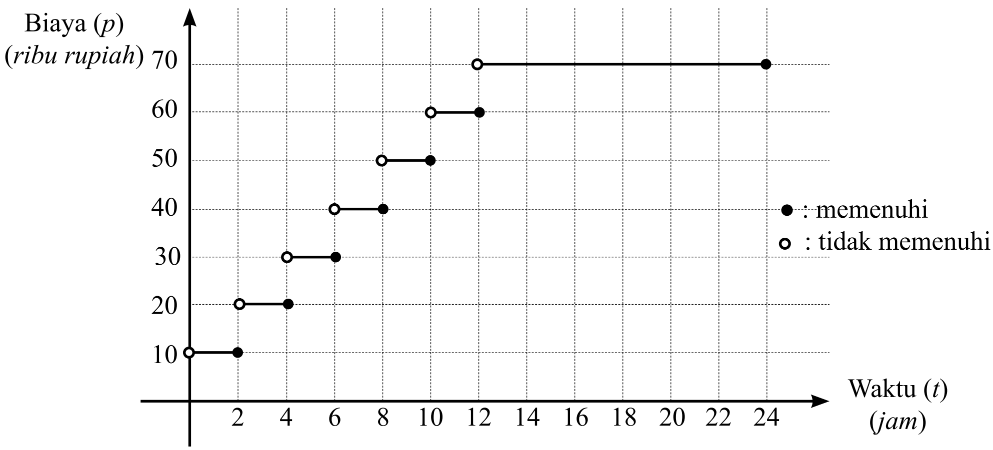
Tabel 5.1. Biaya parkir

No	Lama waktu (t) (*Dalam satuan jam*)	Biaya Parkir (p) (*Dalam satuan ribu rupiah*)
1	$0 < t \leq 2$	10
2	$2 < t \leq 4$	20
3	$4 < t \leq 6$	30
4	$6 < t \leq 8$	40
5	$8 < t \leq 10$	50
6	$10 < t \leq 12$	60
7	$12 < t \leq 24$	70

Gambarkanlah biaya parkir di atas dalam bentuk grafik kartesius. Jika seseorang memarkirkan mobilnya dari pukul 07.30 WIB sampai dengan pukul 10.00 WIB, berapa biaya parkir yang harus dibayar?

Alternatif Penyelesaian

Tarif parkir berdasarkan Tabel 5.1 di atas, jika digambarkan dalam grafik kartesius ditunjukkan sebagai berikut.



Gambar 5.7 Biaya parkir per jam

Jika lama waktu parkir dari pukul 07.30 WIB sampai pukul 10.00 WIB, maka seseorang itu parkir selama 2 jam 30 menit dan membayar parkir sebesar Rp 20.000,-.

Hubungan antara lama waktu parkir dengan biaya parkir pada Masalah 5.2 di atas merupakan sebuah contoh relasi.

Dari relasi antara waktu parkir dengan biaya pada Masalah 5.2 di atas, dinyatakan hal-hal berikut.

Daerah asal adalah $\{t : 0 < t \leq 24\}$

Daerah kawan adalah: $\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70\}$

Daerah hasil adalah: $\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70\}$

Berdasarkan contoh-contoh di atas, ditemukan definisi daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil sebagai berikut.

Definisi 5.2

Daerah asal atau biasa disebut domain suatu relasi adalah himpunan tidak kosong dimana sebuah relasi didefinisikan.

Definisi 5.3

Daerah kawan atau biasa disebut kodomain suatu relasi adalah himpunan tidak kosong dimana anggota domain memiliki pasangan sesuai relasi yang didefinisikan.

Definisi 5.4

Daerah hasil atau biasa disebut *range* suatu relasi adalah sebuah himpunan bagian dari daerah kawan (*kodomain*) yang anggotanya adalah pasangan anggota domain yang memenuhi relasi yang didefinisikan.

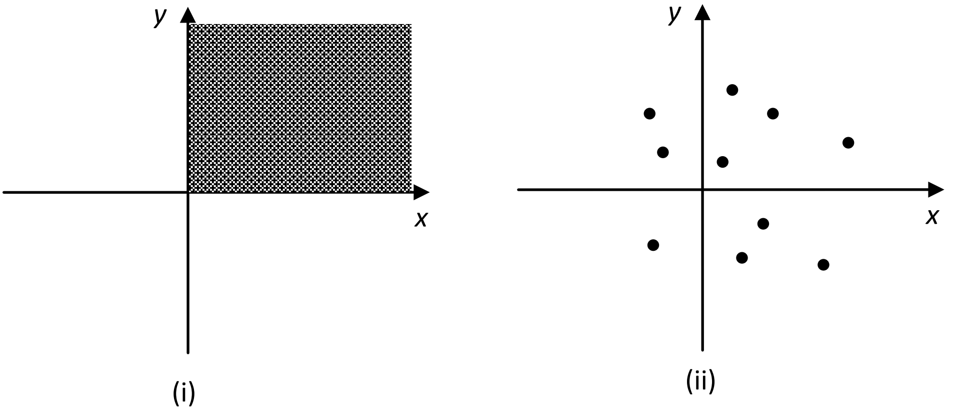
Pertanyaan Kritis

Apakah ada kemungkinan bahwa daerah kawan sama dengan daerah hasil? Berikan alasanmu!

Untuk lebih memahami definisi di atas, buatlah contoh dan bukan contoh relasi dalam kehidupanmu sehari-hari.

Sebuah relasi sering dinyatakan dalam bentuk persamaan dalam variabel x dan y, sebagai contoh: $y = x + 1$ dan $x = y^2$. Nilai x merupakan domain relasi dan nilai y merupakan daerah hasil relasi. Pada persamaan $y = x + 1$, jika domain x dibatasi oleh $0 < x \leq 5$, untuk x bilangan real, maka daerah hasilnya adalah $1 < y \leq 6$.

Akan tetapi, tidak semua relasi dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 5.8 Jenis-jenis relasi

Berdasarkan Gambar 5.8, dapat diketahui bahwa:

(i) Seluruh titik pada $x > 0$ dan $y > 0$ merupakan contoh relasi.

(ii) Kesepuluh titik-titik pada Gambar 5.8 (ii) merupakan contoh relasi.

Pertanyaan Kritis

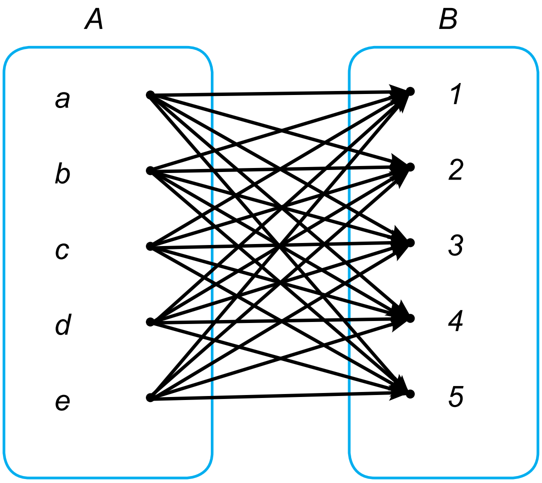
Pada persamaan $x = y^2$, apakah domainnya berlaku untuk semua x bilangan real? Jelaskan.

Contoh 5.1

Diberikan himpunan $A = \{a,b,c,d\}$ dan $B = \{1,2,3,4,5\}$. Pasangkanlah secara terurut setiap anggota himpunan A dengan setiap anggota himpunan B.

Alternatif Penyelesaian

Pasangan terurut setiap anggota himpunan A dengan setiap anggota himpunan B ditunjukkan oleh diagram berikut.



Berdasarkan diagram di atas dapat disimpulkan bahwa banyak anggota himpunan pasangan berurutan anggota himpunan A dan himpunan B sebanyak $5 \times 5 = 25$ buah pasangan. Pasangan dinyatakan dalam bentuk himpunan

$A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (a,4), (a,5), (b,1), (b,2), (b,3), (b,4), (b,5),\ldots, (d,5)\}$.

Secara umum himpunan pasangan terurut dinyatakan sebagai berikut.

Definisi 5.5

Misalkan A dan B dua himpunan. Relasi dari A ke B yang memasangkan setiap anggota himpunan A ke setiap anggota himpunan B disebut hasil kali kartesius A dan B, dan ditulis:

$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\}$.

2. Sifat-Sifat Relasi

Perhatikan contoh berikut.

Contoh 5.2

Diketahui R relasi pada himpunan $A = \{1,2,3,4\}$, dan dinyatakan dengan pasangan terurut: $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3),(1,4),(2,4),(3,4)\}$. Dari relasi ini diperoleh bahwa:

- Domain R adalah: $\{1, 2, 3\}$ dan range R adalah: $\{1, 2, 3, 4\}$.
- $1 \in$ domain R berpasangan dengan dirinya sendiri atau 1 berpasangan dengan 1. Pasangan terurut $(1,1) \in R$.
- $2 \in$ domain R berpasangan dengan dirinya sendiri atau 2 berpasangan dengan 2. Pasangan terurut $(2,2) \in R$.
- $3 \in$ domain R berpasangan dengan dirinya sendiri atau 3 berpasangan dengan 3. Pasangan terurut $(3,3) \in R$.

Karena seluruh domain R berpasangan dengan dirinya sendiri, maka relasi R bersifat reflektif.

Bandingkan dengan Contoh 5.3 berikut.

Contoh 5.3

Diketahui P relasi pada himpunan $B = \{3,4,5\}$, dan dinyatakan dengan pasangan terurut: $P = \{(3,3), (3,4), (4,3), (4,4), (5,3), (5,4)\}$. Dari relasi ini diketahui bahwa:

- Domain P adalah: $\{3, 4, 5\}$ dan range P adalah: $\{3, 4\}$.
- $3 \in$ domain P berpasangan dengan dirinya sendiri atau 3 berpasangan dengan 3. Pasangan terurut $(3,3) \in$ P.
- $4 \in$ domain P berpasangan dengan dirinya sendiri atau 4 berpasangan dengan 4. Pasangan terurut $(4,4) \in P$.
- $5 \in$ domain P tidak berpasangan dengan dirinya sendiri atau 5 tidak berpasangan dengan 5. Pasangan terurut $(5,5) \notin P$.

Karena $5 \in$ domain P tidak berpasangan dengan dirinya sendiri yaitu pasangan terurut $(5,5) \notin P$, maka relasi P tidak bersifat reflektif.

Sifat-1: Sifat Reflektif

Misalkan R sebuah relasi yang didefinisikan pada himpunan P. Relasi R dikatakan bersifat refleksif jika untuk setiap $p \in P$ berlaku $(p, p) \in R$.

Contoh 5.4

Diberikan himpunan $P = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan P dengan hasil relasi adalah himpunan $S = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,2)\}$. Relasi R tersebut bersifat reflektif sebab setiap anggota himpunan P berpasangan atau berelasi dengan dirinya sendiri.

Contoh 5.5

Diberikan himpunan $Q = \{2,4,5\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan Q dengan $R = \{(a,b) \mid a$ kelipatan bulat b, dengan $a,b \in Q\}$, sehingga diperoleh $R = \{(2,2), (4,4), (5,5), (4,2)\}$. Relasi R tersebut bersifat reflektif sebab setiap anggota himpunan Q berpasangan atau berelasi dengan dirinya sendiri.

Contoh 5.6

Diberikan himpunan $C = \{2,4,5\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan C dengan $R = \{(a,b) \mid a + b < 9$, dengan $a,b \in C\}$, maka diperoleh $S = \{(2,2), (2,4), (2,5), (4,2), (4,4), (5,2)\}$. Relasi R tersebut tidak bersifat refleksif sebab ada anggota himpunan C, yaitu 5 tidak berelasi dengan dirinya sendiri atau $(5, 5) \notin R$.

Sifat-2: Sifat Simetris

Misalkan R sebuah relasi pada himpunan P. Relasi R dikatakan bersifat simetris, apabila untuk setiap $(x, y) \in R$ berlaku $(y, x) \in R$.

Contoh 5.7

Diberikan himpunan $P = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan P dengan $R = \{(1,1) , (1,2), (1,3), (2,2), (2,1), (3,1), (3,3)\}$. Relasi R bersifat simetris sebab untuk setiap $(x,y) \in R$, berlaku $(y,x) \in R$.

Contoh 5.8

Diberikan himpunan $A = \{2, 4, 5\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan A dengan $R = \{(x, y) \mid x$ kelipatan y, dengan $x, y \in A\}$, maka diperoleh $R = \{(2,2), (4,4), (5,5), (4,2)\}$. Relasi R tersebut tidak bersifat simetris karena (4,2) anggota R tetapi $(2,4) \notin R$.

Sifat-3: Sifat Transitif

Misalkan R sebuah relasi pada himpunan P. Relasi R bersifat transitif apabila untuk setiap $(x,y) \in R$ dan $(y,z) \in R$ maka berlaku $(x,z) \in R$.

Contoh 5.9

Diberikan himpunan $P = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi pada himpunan P dengan hasil relasi adalah himpunan $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3)\}$. Relasi R tersebut bersifat transitif sebab $(x,y) \in R$ dan $(y,z) \in R$ maka berlaku $(x,z) \in R$.

Contoh 5.10

Diberikan himpunan $C = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi R dengan $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,2)\}$. Relasi R tidak memenuhi sifat transitif, sebab terdapat $(1,1) \in R$ dan $(1,2) \in R$, tetapi $(2,1) \notin R$.

Pertanyaan Kritis

(1) Untuk membuktikan bahwa relasi R pada Contoh 5.9 bersifat transitif, apakah kamu boleh memilih $x = 1$, $y = 2$, dan $z = 3$? Mengapa?

(2) Contoh yang dipilih untuk membuktikan bahwa relasi R pada Contoh 5.10 tidak bersifat transitif adalah: $(1,1) \in R$ dan $(1,2) \in R$, tetapi $(2,1) \notin R$. Jika kamu perhatikan kembali Sifat-3, tentukan nilai x, y, dan z agar bukti itu benar. Berikan alasanmu.

(3) Apakah ada contoh lain yang kamu pilih untuk membuktikan bahwa relasi R pada Contoh 5.10 tidak bersifat transitif? Sebutkan.

Sifat-4: Sifat Antisimetris

Misalkan R sebuah relasi pada sebuah himpunan P. Relasi R dikatakan bersifat antisimetris, apabila untuk setiap $(x,y) \in R$ dan $(y,x) \in R$ berlaku $x = y$.

Contoh 5.11

Diberikan himpunan $C = \{2, 4, 5\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan C dengan $R = \{ (a,b) \in a$ kelipatan b, $a,b \in C\}$ sehingga diperoleh $R = \{(2,2), (4,4), (5,5), (4,2)\}$. Relasi R tersebut bersifat antisimetris.

Contoh 5.12

Diberikan $S = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan S dengan $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3)\}$. Relasi R tidak bersifat antisimetris sebab terdapat $(1,2) \in R$ dan $(2,1) \in R$, tetapi $1 \neq 2$.

Definisi 5.6

Misalkan R sebuah relasi pada himpunan P. Relasi R dikatakan relasi ekivalensi jika dan hanya jika relasi R memenuhi sifat reflektif, simetris, dan transitif.

Contoh 5.13

Diberikan himpunan $P = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi pada himpunan P dengan $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3)\}$. Relasi R tersebut bersifat reflektif, simetris dan transitif. Oleh karena itu relasi R merupakan relasi ekivalensi.

Coba kerjasama dengan temanmu menunjukkan bahwa R dalam Contoh 5.13 memenuhi sifat reflektif, simetris dan transitif.

3. Menemukan Konsep Fungsi

Masalah-5.3

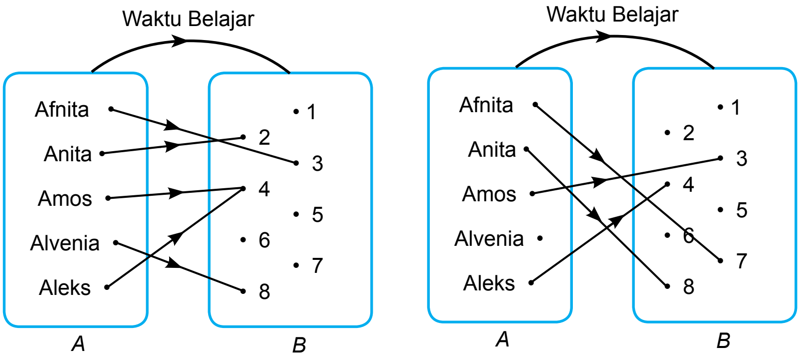
Lima orang siswa yaitu: Afnita, Anita, Amos, Alvenia, dan Aleks merupakan sahabat yang selalu bersama-sama dalam setiap kegiatan sekolah. Bapak Martono adalah guru matematika yang senang dengan persahabatan yang mereka bina karena mereka selalu memiliki nilai paling bagus dari antara teman-teman sekelasnya. Suatu hari bapak Martono ingin mengetahui data-data tentang mereka. Hal itu diperlukannya sebagai bahan motivasi untuk teman-teman satu kelas mereka. Data-data yang diinginkan berupa: berapa jam rata-rata waktu belajar mereka dalam satu hari, dan berapa banyak saudara mereka.

1) Jika kelima sahabat itu dibuat dalam satu himpunan misalnya A = {Afnita, Anita, Amos, Alvenia, Aleks}, dan lama waktu belajar dalam satu hari adalah, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
   a. Nyatakanlah sebuah relasi yang mungkin menurutmu menggambarkan lama waktu belajar lima orang sahabat itu.
   b. Apakah semua anggota himpunan A pasti memiliki pasangan anggota himpunan B? Berikan penjelasanmu!
   c. Apakah ada kemungkinan bahwa anggota himpunan A berpasangan dengan 2 atau lebih anggota himpunan B? Berikan penjelasanmu!
   d. Apakah ada kemungkinan bahwa dua anggota himpunan A memiliki pasangan yang yang sama dengan salah satu anggota himpunan B? Berikan penjelasanmu!
2) Jika kelima sahabat itu dibuat dalam satu himpunan misalnya C = {Afnita, Anita, Amos, Alvenia, Aleks}, dan data tentang banyak saudara mereka adalah $D = \{1, 2, 3, 4\}$.
   a. Nyatakanlah sebuah relasi yang mungkin menurutmu menggambarkan banyak saudara kelima orang sahabat itu.
   b. Untuk semua relasi yang mungkin, apakah semua anggota himpunan C memiliki pasangan anggota himpunan D? Berikan penjelasanmu!
   c. Apakah ada kemungkinan bahwa anggota himpunan C berpasangan dengan 2 atau lebih anggota himpunan D? Berikan penjelasanmu!
   d. Apakah ada kemungkinan bahwa dua anggota himpunan C memiliki pasangan yang yang sama dengan salah satu anggota himpunan D? Berikan penjelasanmu!

Alternatif Penyelesaian

1. Diketahui: A = {Afnita, Anita, Amos, Alvenia, Aleks}
   B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

   a. Relasi yang mungkin menggambarkan rata-rata lama waktu belajar lima orang sahabat itu.



Gambar 5.9 Relasi rata-rata jam belajar

   b. Jawabannya adalah tidak, karena anggota himpunan B telah dibatasi dari waktu 1 s/d 8 jam, maka diantara kelima sahabat itu dan kemungkinan lain memiliki rata-rata waktu belajar lebih dari 8 jam setiap hari.

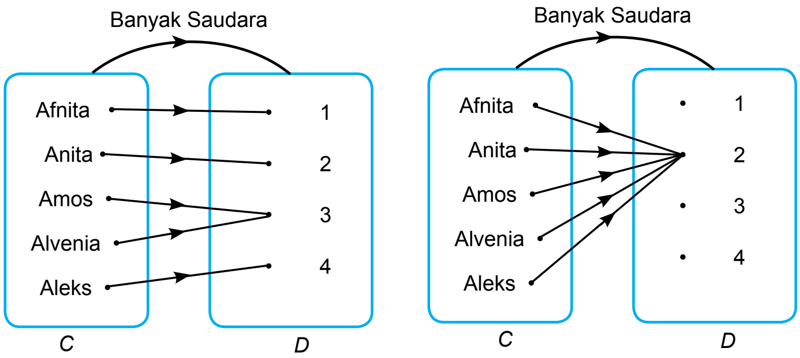
   c. Jawabannya tidak. Anggota himpunan A dipasangkan dengan anggota himpunan B dengan relasi rata-rata lama waktu belajar. Nilai rata-rata waktu belajar seseorang hanya ada satu nilai, sehingga anggota himpunan A akan dipasangkan dengan salah satu anggota di himpunan B.

   d. Jawabannya ya. Nilai rata-rata waktu belajar seseorang dimungkinkan sama dengan nilai rata-rata waktu belajar orang lain, sehingga anggota-anggota himpunan A memungkinkan memiliki pasangan yang sama dengan salah satu anggota di himpunan B.

2. Kelima sahabat itu membentuk satu himpunan misalnya himpunan C dan data tentang banyak saudara mereka himpunan D.

   Diketahui: C = {Afnita, Anita, Amos, Alvenia, Aleks}
   D = {1, 2, 3, 4}

   a) Relasi yang mungkin yang menggambarkan banyak saudara kelima orang sahabat itu ditunjukkan pada diagram panah berikut.



Gambar 5.10 Relasi banyak saudara

b) Jawabannya ya. Karena data tentang banyak saudara kelima sahabat itu ada di anggota himpunan *D*, maka seluruh anggota himpunan *C* pasti memiliki pasangan dengan anggota himpunan *D*.

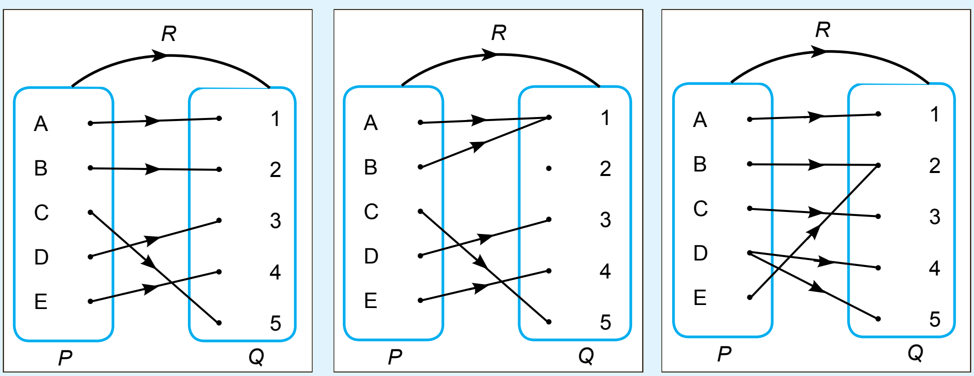
c) Jawabannya tidak. Anggota himpunan *A* dipasangkan dengan anggota himpunan *B* dengan relasi banyak saudara. Banyak saudara seseorang hanya ada satu nilai, sehingga anggota himpunan *C* akan dipasangkan dengan salah satu anggota di himpunan *D*.

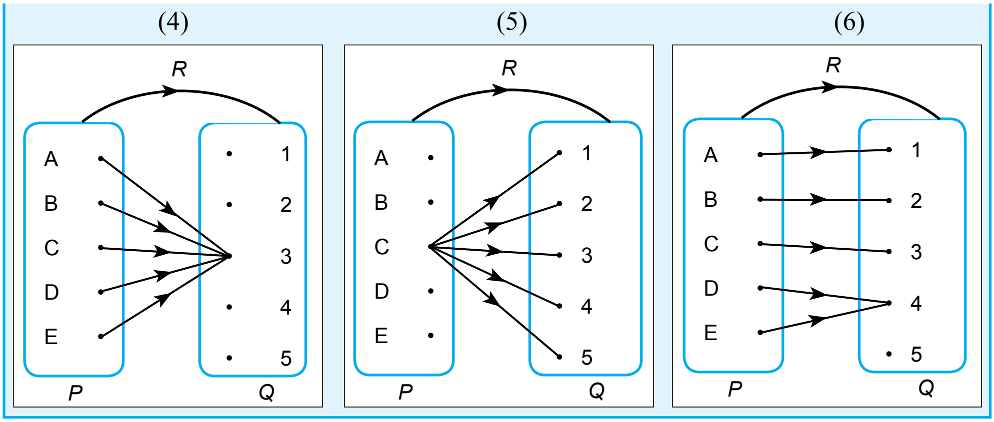
d) Jawabannya ya. Banyak saudara seseorang dimungkinkan sama dengan banyak saudara orang lain, sehingga anggota-anggota himpunan *C* memungkinkan memiliki pasangan yang sama dengan salah satu anggota di himpunan *D*.

Masalah-5.4

Perhatikan relasi-relasi yang ditunjukkan pada gambar berikut.

(1) (2) (3)





Uraikanlah fakta-fakta untuk semua relasi yang ditunjukan pada gambar.

Alternatif Penyelesaian

Dari gambar di atas, uraian fakta untuk semua relasi yang diberikan adalah sebagai berikut.

Relasi 1:

- Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan anggota himpunan *Q*
- Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan tunggal dengan anggota himpunan *Q*
- Semua anggota himpunan *Q* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *P*.

Relasi 2:

- Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *Q*.
- Ada anggota himpunan *P* yang berpasangan dengan dua buah anggota himpunan *Q*.
- Ada anggota himpunan *Q* yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan *P*.

Relasi 3:

- Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *Q*.
- Ada anggota himpunan *P* yang berpasangan dengan dua anggota himpunan *Q*.
- Semua anggota himpunan *Q* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *P*.

Relasi 4:

- Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *Q*.
- Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan yang tunggal dengan anggota himpunan *Q*.
- Ada anggota himpunan *Q* yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan *P*.

Relasi 5:

- Ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
- Ada anggota himpunan P yang berpasangan dengan semua anggota himpunan Q.
- Semua anggota himpunan Q memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Relasi 6:

- Ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
- Ada anggota himpunan Q yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Relasi 1, relasi 2, dan relasi 4 merupakan contoh fungsi. Syarat sebuah relasi menjadi fungsi adalah sebagai berikut.

- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan tunggal dengan anggota himpunan Q.

Berdasarkan contoh-contoh di atas kita temukan definisi fungsi sebagai berikut.

Definisi 5.7

Misalkan A dan B himpunan.
Fungsi f dari A ke B adalah suatu aturan pengaitan yang memasangkan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B.

Definisi 5.7 di atas, secara simbolik ditulis menjadi $f : A \to B$, dibaca: fungsi f memetakan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B.

Jika f memetakan suatu elemen $x \in A$ ke suatu $y \in B$ dikatakan bahwa y adalah peta x oleh fungsi f dan peta ini dinyatakan dengan notasi $f(x)$ dan x disebut prapeta y, dengan demikian dapat ditulis menjadi:
$f : x \to y$, dibaca: fungsi f memetakan x ke y, sedemikian hingga $y = f(x)$.

Perhatikan kembali Masalah 5.3 di atas, berilah alasan mengapa relasi 3, relasi 5, dan relasi 6 bukan fungsi.

Alternatif Penyelesaian

1) Relasi 3 bukan fungsi karena ada anggota himpunan P yang berpasangan tidak tunggal dengan anggota himpunan Q yaitu D yang berpasangan dengan 4 dan 5 meskipun seluruh anggota himpunan P memiliki pasangan di himpunan Q.

2) Relasi 5 bukan fungsi karena:
   a. Ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q yaitu $\{A, B, D, E\}$.
   b. Ada anggota himpunan P yang memiliki pasangan tidak tunggal dengan anggota himpunan Q yaitu $\{C\}$.
3) Relasi 6 bukan fungsi karena ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q yaitu $\{D\}$.

Contoh 5.14

Diketahui fungsi $f : x \to f(x)$ dengan rumus fungsi $f(x) = px - q$. Jika $f(1) = -3$ dan $f(4) = 3$, tentukanlah nilai p dan q kemudian tuliskanlah rumus fungsinya.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui $f(x) = px - q$.

$f(1) = -3$

$f(4) = 3$.

Ditanya nilai p, q, dan rumus fungsi

Jika $f(1) = -3$ maka $f(x) = px - q \to -3 = p - q$ .... (1)

Coba kamu jelaskan mengapa demikian?

Jika $f(4) = 3$ maka $f(x) = px - q \to 3 = 4p - q$ .... (2)

Coba kamu jelaskan mengapa demikian?

Dengan menerapkan metode eliminasi pada persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$\begin{array}{rl} -3 &= p - q \\ 3 &= 4p - q \quad - \\ \hline -6 &= p - 4p \end{array}$$

$-6 = -3p$

$p = 2$

Substitusi nilai $p = 2$ ke persamaan $-3 = p - q$

Sehingga diperoleh:

$-3 = 2 - q$

$-3 = 2 - q \to q = 2 + 3 \to q = 5$

Jadi diperoleh $p = 2$ dan $q = 5$

Berdasarkan nilai p dan q, maka rumus fungsi $f(x) = px - q$ menjadi $f(x) = 2x - 5$.

Contoh 5.15

Diketahui fungsi f dengan rumus $f(x) = \sqrt{2x+6}$. Tentukanlah domain fungsi f agar memiliki pasangan anggota himpunan bilangan real.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui: $f(x) = \sqrt{2x+6}$
Ditanya: domain f

Domain fungsi f memiliki pasangan dengan anggota himpunan bilangan real apabila
$2x + 6 \geq 0$,
$2x \geq -6 \quad \leftrightarrow \quad x \geq -3$.

Diskusi

Diskusikan dengan temanmu:
Berdasarkan Contoh 5.15:

a) Mengapa fungsi *f* memiliki pasangan anggota himpunan bilangan real apabila 2*x* + 6 ≥ 0?
b) Apakah *f* terdefinisi untuk 2*x* + 6 < 0? Mengapa?
c) Apakah *x* = -4 memiliki pasangan? Mengapa?

Contoh 5.16

Diketahui f suatu fungsi $f : x \to f(x)$. Jika 1 berpasangan dengan 4 dan $f(x+1) = 2f(x)$. Tentukan pasangan $x = 4$?

Alternatif Penyelesaian

Diketahui: $f : x \to f(x)$
$f(1) = 4$
$f(x+1) = 2\,f(x)$

Ditanya: $f(4)$?

Jawab: $f(x+1) = 2f(x)$
untuk $x = 1$, maka $f(1+1) = 2f(1)$
$f(2) = 2.f(1) = 2.4 = 8$
$f(3) = 2.f(2) = 2.8 = 16$
$f(4) = 2.f(3) = 2.16 = 32$
karena $f(4) = 32$, maka pasangan $x = 4$ adalah 32.

Diskusi

Berdasarkan Contoh 5.16, diskusikan dengan temanmu hal-hal berikut.

a. Tentukan pasangan $x = 2013$

b. Bagaimana cara paling cepat menentukan pasangan tersebut?

Contoh 5.17

Diketahui f sebuah fungsi yang memetakan x ke y dengan rumus $y = \frac{x+2}{2x-6}, x \neq 3$. Tentukan rumus fungsi jika g memetakan y ke x.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui f sebuah fungsi yang memetakan x ke y dengan rumus $y = \frac{x+2}{2x-6}$. Tuliskanlah rumus fungsi jika g memetakan y ke x.

Diketahui: f sebuah fungsi yang memetakan x ke y dengan rumus $y = \frac{x+2}{2x-6}$, dimana $x \neq 3$ dan x bilangan real.

Ditanya: rumus fungsi g yang memetakan y ke x.

Jawab:

$$y = \frac{x+2}{2x-6}$$

$$\Leftrightarrow (2x - 6)(y) = x + 2 \qquad \text{(kedua ruas dikalikan } 2x - 6\text{)}$$

$$\Leftrightarrow 2xy - 6y = x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2xy - x = 6y + 2$$

$$\Leftrightarrow x(2y - 1) = 6y + 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6y+2}{2y-1} \qquad \text{(kedua ruas dibagi } 2y - 1\text{)}$$

Maka fungsi g memetakan y ke x dengan rumus: $g(y) = \frac{6y+2}{2y-1}$.

Diskusi

Diskusikan dengan temanmu:
Berdasarkan Contoh 5.17:

a) Jika $f : x \to y$, apakah x = 3 memiliki pasangan anggota himpunan bilangan real? Mengapa?

b) Jika $g : y \to x$. apakah $y = \frac{1}{2}$ memiliki pasangan anggota himpunan bilangan real? Mengapa?

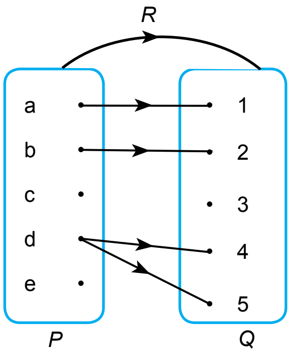
c) Berikan syarat agar $f : x \to y$ terdefinisi.

d) Berikan syarat agar $g: y \to x$ terdefinisi.

Uji Kompetensi 5.1

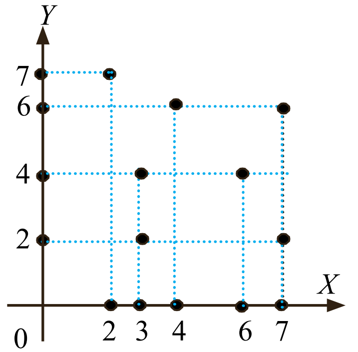
1. Tentukanlah daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil dari relasi-relasi berikut.

   a)



   b) Relasi yang dinyatakan dengan pasangan terurut: {(Yaska, Nora), (Riwanti, Glorista), (Felix, Krisantus), (Ramsida, Dahniar)}

   c)



2. Sekumpulan anak yang terdiri atas 5 orang yaitu: Siti, Beni, Dayu, Joko, dan Tono berturut-turut berusia 6, 7, 9, 10, dan 11 tahun. Pasangkanlah usia tiap-tiap anak pada bilangan prima yang kurang dari 15. Apakah semua anak dapat dipasangkan? Tentukanlah daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasilnya!

3. Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan himpunan $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12\}$. Nyatakanlah relasi A terhadap B dengan rumus berikut.

   a) $b = a + 1$, $a \in A$ dan $b \in B$.

   b) $b = 2a + 2$, $a \in A$ dan b $\in B$.

   Kemudian periksa apakah relasi yang terbentuk adalah fungsi atau tidak, jelaskan

4. Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3, 6\}$ dan $B = \{2, 3, 6, 12\}$

   a) Gambarlah diagram panah dari himpunan A ke himpunan B yang menunjukkan relasi 'faktor dari'.

   b) Nyatakanlah hubungan itu dengan himpunan pasangan terurut dan grafik kartesius

5. Diketahui himpunan $P = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Bila relasi dari P ke Q adalah 'kurangnya 1 dari', apakah relasi tersebut merupakan fungsi? Jelaskan dan gambarlah relasi tersebut dalam diagram panah.

6. Diketahui fungsi $f(x) = 2x + 1$ dengan daerah asal $\{x \mid -3 \leq x \leq 2, x$ bilangan bulat$\}$, tentukanlah.

   a) Daerah asal dengan mendaftar anggotanya satu persatu.

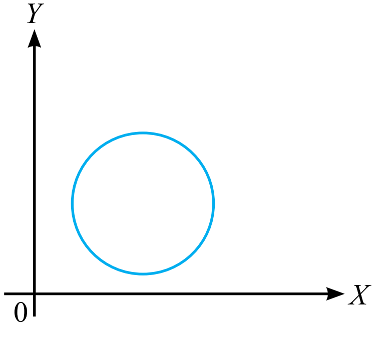
   b) Daerah hasil.

   c) Nyatakanlah fungsi tersebut dengan diagram panah, pasangan terurut, dan grafik kartesius

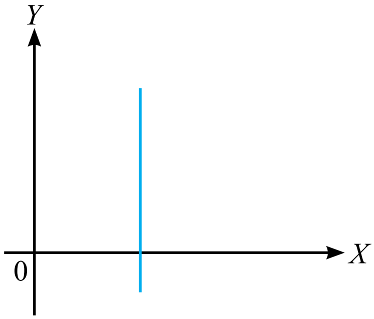
7. Jika siswa direlasikan dengan tanggal kelahirannya. Apakah relasi tersebut merupakan fungsi? Berikan penjelasanmu!

8. Perhatikan gambar berikut!
   Manakah yang merupakan fungsi, jika daerah asalnya merupakan sumbu X?

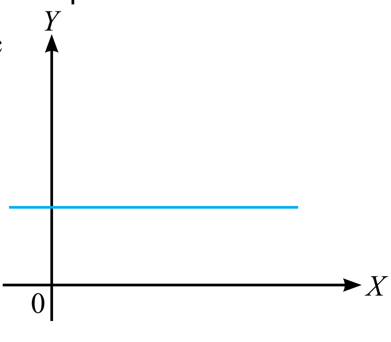
a.



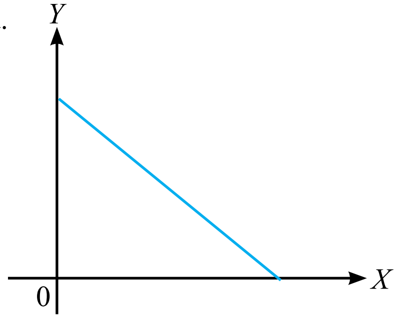
b.



c



d.



9. Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{8}{5-x}$ dengan $x \neq 5$. Tentukanlah
   a) $f(1)$
   b) $f(-3)$
   c) $f(7)$
   d) Nilai x jika $f(x) = 2$
   e) Nilai a, jika $f(a) = 0{,}5$

10. Diketahui rumus fungsi $f(x) = ax + b$. Jika $f(3) = 15$ dan $f(-2) = 10$, tentukanlah.
    a) Nilai a dan b
    b) Rumus fungsi $f(x)$
    c) Nilai $f(7)$

11. Jika $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, maka untuk $x \neq 1$ tentukanlah $f(-x)$.

12. Jika $y = \dfrac{x-1}{2x+1}$ $x \neq -\dfrac{1}{2}$, tuliskanlah x sebagai fungsi y. Kemudian tentukanlah syarat kedua fungsi tersebut agar terdefinisi untuk setiap x, y bilangan real.

13. Diketahui $f(2x - 3) = 4x - 7$, maka nilai dari $f(17) - f(7)$ adalah ....

14. Bila $f(x) = \dfrac{x}{a}\left[1 - \dfrac{b^2}{x^2}\right] + \dfrac{x}{b}\left[1 - \dfrac{a^2}{x^2}\right]$,

    maka $f(a + b)$ adalah ....

15. Misalkan $f(n)$ didefiniskan kuadrat dari penjumlahan digit n. Misalkan juga $f^2(n)$ didefinisikan $f(f(n))$ dan $f^3(n)$ didefinisikan

    $f(f(f(n)))$ dan seterusnya. Tentukan

    $f^{1998}(11)$.

16. Diketahui fungsi f dengan rumus $f = \sqrt{\dfrac{1}{2}x - 8}$. Tentukanlah domain fungsi f agar memiliki pasangan di anggota himpunan bilangan real.

Projek

Rancanglah sebuah masalah terkait lintasan seekor lebah yang terbang terkadang naik, bergerak lurus dan terkadang turun pada saat waktu tertentu. Jika lintasan lebah tersebut merupakan fungsi, buatlah interval saat kapan lebah tersebut bergerak naik, lurus, dan saat turun. Buatlah hasil kerja kelompokmu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Berdasarkan uraian materi pada Bab 5 ini, beberapa kesimpulan yang dapat dinyatakan sebagai pengetahuan awal untuk mendalami dan melanjutkan bab bahasan berikutnya, disajikan sebagai berikut.

1. Setiap relasi adalah himpunan. Tetapi sebuah himpunan belum tentu merupakan relasi.
2. Setiap fungsi merupakan relasi. Tetapi sebuah relasi belum tentu merupakan fungsi.
3. Dari pernyataan (1) dan (2) disimpulkan bahwa setiap fungsi dan relasi adalah himpunan.
4. Relasi memiliki sifat, antara lain (1) reflektif, (2) simetris, (3) transitif, dan (4) sifat antisimetris. Jika sebuah relasi memenuhi sifat reflektif, simetris dan transitif, maka relasi tersebut dikatakan relasi ekuivalen.
5. Fungsi adalah bagian dari relasi yang memasangkan setiap anggota domain dengan tepat satu anggota kodomain. Fungsi yang demikian disebut juga pemetaan.
6. Untuk lebih mendalami materi fungsi kamu dapat mempelajari berbagai jenis fungsi pada sumber belajar yang lain, seperti fungsi naik dan turun, fungsi ganjil dan fungsi genap, fungsi injektif, surjektif, fungsi satu-satu, dan sebagainya.

Materi selanjutnya adalah barisan dan deret. Barisan adalah sebuah fungsi dengan domain bilangan asli dan daerah hasilnya adalah suatu himpunan bagian dari bilangan real. Jadi pengetahuan kamu tentang relasi dan fungsi sangat menentukan keberhasilan kamu menguasai berbagai konsep dan aturan dalam barisan dan deret.

Catatan:

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bab 6

Barisan dan Deret

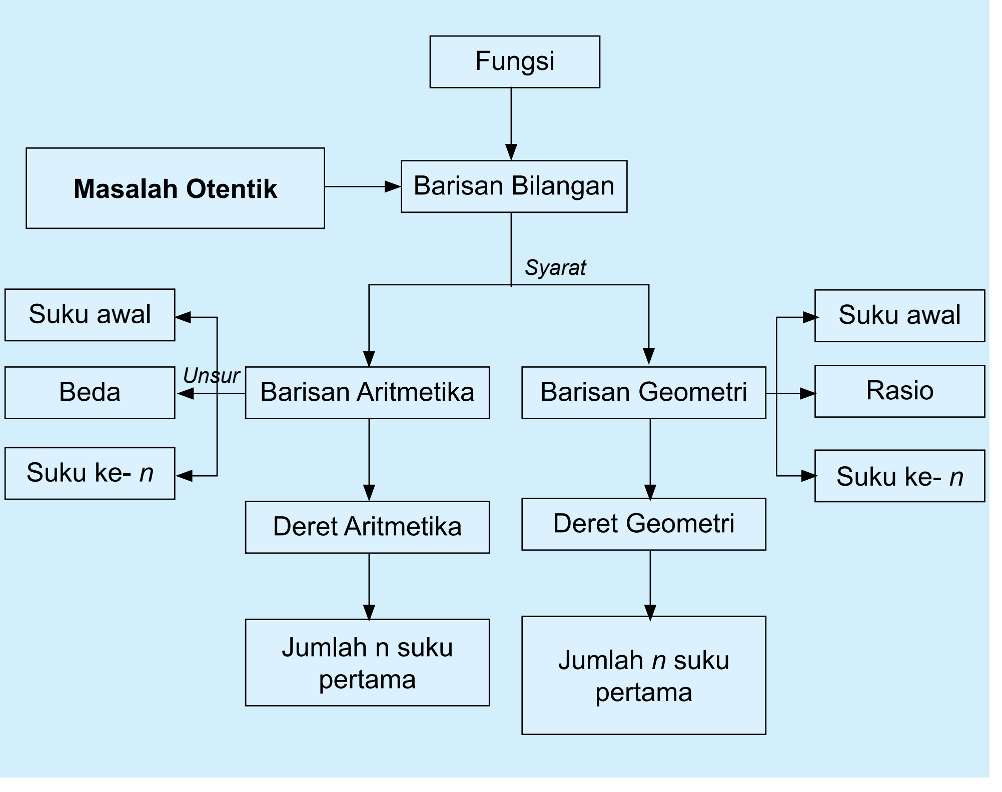
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran barisan dan deret, siswa mampu: 1. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percayadiri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalammemilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah. 2. Mentransformasi diri dalam berpilaku jujur, tangguh mengadapi masalah, kritis dan disiplin dalam melakukan tugas belajar matematika 3. Menunjukkan sikap bertanggung jawab, rasa ingin tahu, jujur dan perilaku peduli lingkungan. 4. Memprediksi pola barisan dan deret aritmetika dan geometri atau barisan lainnya melalui pengamatan dan memberikan alasannya. 5. Menyajikan hasil menemukan pola barisan dan deret dan penerapannya dalam penyelesaian masalah sederhana.	Melalui pembelajaran materi barisan dan deret aritmetika dan geometri atau barisan lainnya,siswa memperoleh pengalaman belajar: • menemukan konsep dan pola barisan dan deret melalui pemecahan masalah otentik; • berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial kultur; • berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis, kreatif) dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep dan pola barisan dan deret dalam memecahkan masalah otentik.

Istilah Penting

- *Pola Bilangan*
- *Beda*
- *Rasio*
- *Suku*
- *Jumlah n suku pertama*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

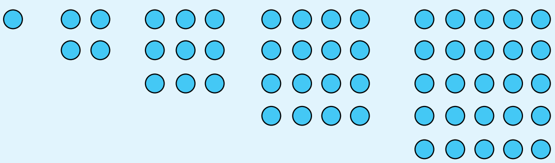
1. Menemukan Pola Barisan dan Deret

Amati dan kritisi masalah nyata kehidupan yang dapat dipecahkan secara arif dan kreatif melalui proses matematisasi. Dalam proses pembelajaran barisan dan deret, berbagai konsep dan aturan matematika terkait barisan dan deret akan ditemukan melalui pemecahan masalah, melihat pola susunan bilangan, menemukan berbagai strategi sebagai alternatif pemecahan masalah.

Kita akan mempelajari beberapa kasus dan contoh yang berkaitan dengan barisan dan deret pada bab ini. Barisan suatu objek membicarakan masalah urutannya dengan aturan tertentu. Aturan yang dimaksud adalah pola barisan. Kita memerlukan pengamatan terhadap suatu barisan untuk menemukan pola.

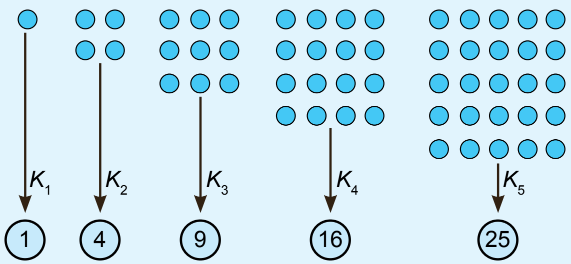
Masalah-6.1

Beberapa kelereng dikelompokkan dan disusun sehingga setiap kelompok tersusun dalam bentuk persegi sebagai berikut:



Gambar 6.1 Susunan Kelereng

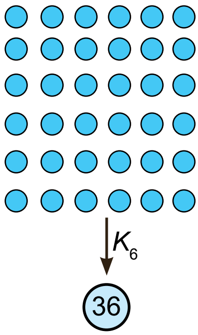
Kelereng dihitung pada setiap kelompok dan diperoleh barisan: 1, 4, 9, 16, 25.



Gambar 6.2 Jumlah Kelereng pada Setiap Kelompok

Permasalahan:
Dapatkah kamu temukan bilangan berikutnya pada barisan tersebut? Dapatkah kamu temukan pola barisan tersebut? Berapa banyak kelereng pada kelompok ke-15?

Alternatif Penyelesaian

1. 

Kemungkinan metode yang dapat digunakan adalah membuat susunan kelereng berikutnya dan menghitung kembali banyak kelereng pada susunan tersebut.
Alternatif penyelesaian ini tidak efisien karena harus menyusun kembali banyak kelereng untuk kelompok berikutnya.

Gambar 6.3 Jumlah kelereng pada kelompok ke-6

2. Alternatif penyelesaian lainnya adalah menemukan pola barisan tersebut. Perhatikan tabel berikut!

Tabel 6.1 Pola banyak kelereng pada setiap kelompok

Kelompok	Banyak Kelereng	Pola
K_1	1	$1 = 1 \times 1$
K_2	4	$4 = 2 \times 2$
K_3	...	... = ...
K_4	...	... = ...
K_5	...	... = ...
. . .	. . .	. . .
K_n	...	... = ...

Dengan pola barisan pada tabel yang kamu lengkapi di atas, dapatkah kamu menentukan bilangan berikutnya? Berapakah bilangan untuk kelompok ke-15?

3. Apakah mungkin ada pola lain untuk menyelesaikna masalah diatas? Coba kamu lengkapi tabel berikut ini!

Tabel 6.2 Pola banyak kelereng pada setiap kelompok

Kelompok	Banyak Kelereng	Pola
K_1	1	1 = 1 + 0 = 1 + 1 × 0
K_2	4	... = ...
K_3	9	... = ...
K_4	...	... = ...
K_5	...	... = ...
. . .	. . .	. . .
K_n	?	... = ...

Bagaimana pola barisan dari tabel yang kamu lengkapi di atas? Dapatkah kamu menentukan bilangan berikutnya? Berapakah bilangan untuk kelompok ke-15?

Kamu dapat dengan mudah menentukan bilangan-bilangan berikutnya pada sebuah barisan bilangan jika dapat menemukan pola barisannya. Silahkan pelajari pola barisan pada beberapa contoh berikut.

Contoh 6.1

Perhatikan barisan huruf berikut:
A B B C C C D D D D A B B C C C D D D D A B B C C C D D D D ...
Berdasarkan pola barisan tersebut, tentukanlah huruf pada urutan ke 864.

Alternatif Penyelesaian

Pertama, kita perlihatkan urutan setiap huruf pada barisan, sebagai berikut:

A	*B*	*B*	*C*	*C*	*C*	*D*	*D*	*D*	*D*	*A*	*B*	*B*	*C*	*C*	*C*	*D*	*D*	*D*	*D*	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	...

Jika kamu amati dengan teliti, kelompok huruf *ABBCCCDDDD* pada urutan 1 sampai 10 berulang. Perulangan kelompok huruf terjadi pada setiap kelipatan 10 huruf pertama. Jadi, huruf pada urutan 1 sama dengan huruf pada urutan 11, urutan 21, urutan 31, dan seterusnya.

Kedua, huruf pada urutan ke 864 atau $864 = 860 + 4 = 86 \times 10 + 4$ sehingga perulangan kelompok huruf tersebut mengalami perulangan sebanyak 86 kali. Dengan demikian, huruf pada urutan ke-864 sama dengan huruf pada urutan ke-4 atau *C*. Perhatikan

tabel di bawah ini!

Tabel 6.3 Urutan barisan huruf

Urutan ke	Huruf	Urutan ke	Huruf	...	Urutan ke	Huruf	Urutan ke	Huruf
1	*A*	11	*A*	...	851	*A*	861	*A*
2	*B*	12	*B*	...	852	*B*	862	*B*
3	*B*	13	*B*	...	853	*B*	863	*B*
4	*C*	14	*C*	...	854	*C*	864	*C*
5	*C*	15	*C*	...	855	*C*		
6	*C*	16	*C*	...	856	*C*		
7	*D*	17	*D*	...	857	*D*		
8	*D*	18	*D*	...	858	*D*		
9	*D*	19	*D*	...	859	*D*		
10	*D*	20	*D*	...	860	*D*		

Contoh 6.2

Sebuah barisan bilangan dituliskan sebagai berikut: 12345678910111213141516171 81920212223242526... sehingga suku ke-10 = 1, suku ke-11 = 0, suku ke-12 = 1 dan seterusnya. Dapatkah kamu temukan angka yang menempati suku ke-2004?

Alternatif Penyelesaian

Mari kita amati kembali barisan tersebut, sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & ... & ? \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} & u_{16} & u_{17} & u_{18} & ... & u_{2004} \end{array}$$

u_n menyatakan suku ke-n pada barisan dengan n = 1, 2, 3, 4, ...

Kita akan mencari angka yang menempati suku ke-2004 dengan menghitung banyak suku pada bilangan satuan, puluhan, dan ratusan sebagai berikut:

Langkah 1. Mencari banyak suku pada barisan bilangan satuan (1 sampai 9):
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Banyak suku pada barisan bilangan satuan adalah 1 × 9 = 9 suku.

Langkah 2. Mencari banyak suku pada barisan bilangan puluhan (10 sampai 99)
10, 11, 12, 13, ...,19 terdapat 2 × 10 suku = 20 suku
20, 21, 22, 23, ...,29 terdapat 2 × 10 suku = 20 suku
...
90, 91, 92, 93, ..., 99 terdapat 2 × 10 suku = 20 suku

Banyak suku pada barisan bilangan puluhan adalah 9 × 20 = 180 suku.
Jadi, banyak suku pada barisan 1 sampai 99 adalah 9 + 180 = 189 suku.

Langkah 3. Mencari banyak suku pada barisan bilangan ratusan (100 sampai 999)
Jika ratusan (100 sampai 99)
100, 101, 102, 103, ..., 109 terdapat 3 × 10 suku = 30 suku
110, 111, 112, 113, ..., 119 terdapat 3 × 10 suku = 30 suku
120, 121, 122, 123, ..., 129 terdapat 3 × 10 suku = 30 suku
...
690, 691, 692, 693, ..., 699 terdapat 3 × 10 suku = 30 suku

Banyak suku untuk barisan bilangan ratusan dengan ratusan 1 sampai 6 adalah 6 × 10 × 30 = 1800 suku

Jadi terdapat sebanyak 9 + 180 + 1800 = 1989 suku pada barisan bilangan 1 sampai dengan 699 sehingga suku ke-1989 adalah 9. Suku berikutnya (suku ke-1990) adalah barisan bilangan dengan ratusan sebagai berikut.

$$\begin{matrix} 9 & 7 & 0 & 0 & 7 & 0 & 1 & 7 & 0 & 2 & 7 & 0 & 3 & 7 & 0 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ u_{1989} & u_{1990} & u_{1991} & u_{1992} & u_{1993} & u_{1994} & u_{1995} & u_{1996} & u_{1997} & u_{1998} & u_{1999} & u_{2000} & u_{2001} & u_{2002} & u_{2003} & u_{2004} \end{matrix}$$

Angka pada suku ke-2004 adalah 4.

Contoh 6.3

Diketahui pola barisan bilangan $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \ldots, \frac{1}{9900}$. Tentukanlah banyak suku pada barisan tersebut!

Alternatif Penyelesaian

Jika u_n adalah suku ke-n sebuah barisan dengan n = 1, 2, 3,... maka barisan di atas disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 6.4 Pola Barisan

Suku ke	Nilai	Pola
u_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}=\frac{1}{1^2+1}$
u_2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}=\frac{1}{2^2+2}$
u_3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}=\frac{1}{3^2+3}$
u_4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}=\frac{1}{4^2+4}$
u_5	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}=\frac{1}{5^2+5}$
u_6	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{42}=\frac{1}{6^2+6}$
...	...	...
u_n	?	$?=\frac{1}{n^2+n}$

Berdasarkan pola barisan $u_n = \frac{1}{n^2+n}$ yang telah diperoleh pada tabel di bawah maka $u_n = \frac{1}{9900}$ atau

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{9900}$$

$\Leftrightarrow \quad n^2 + n = 9900$

$\Leftrightarrow \quad n^2 + n - 9900 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (n - 99)(n + 100) = 0$

$\Leftrightarrow \quad n_1 = 99$ atau $n_2 = -100$

Barisan $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \ldots, \frac{1}{9900}$ terdiri atas 99 suku.

- Diskusikan dengan temanmu mengapa yang digunakan $n = 99$?

Jika s_n adalah jumlah n suku pertama dari sebuah barisan dengan $n = 1, 2, 3, ...$ maka deret dari barisan di atas disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 6.5: Pola Deret

Deret	Jumlah suku-suku	Nilai
s_1	u_1	$\frac{1}{2}$
s_2	$u_1 + u_2$	$\frac{2}{3}$
s_3	$u_1 + u_2 + u_3$	$\frac{3}{4}$
s_4	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4$	$\frac{4}{5}$
s_5	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6$	$\frac{5}{6}$
s_6	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6$	$\frac{6}{7}$
...	...	...
s_n	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + ... + u_n$	$s_n = \frac{n}{n+1}$

Berdasarkan tabel di atas, s_1, s_2, s_3, ..., s_n, ..., yaitu $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, ..., \frac{99}{100}, ...$ adalah sebuah barisan dengan pola $s_n = \frac{n}{n+1}$.

Karena $n = 99$ maka $s_{99} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + ... + \frac{1}{9900} = \frac{99}{100}$.

Jika s_n adalah jumlah n suku pertama dari sebuah barisan dengan $n = 1, 2, 3, ...$ atau $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{n-1} + u_n$ dan $s_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{n-1}$ maka $s_n = s_{n-1} + u_n$ atau $u_n = s_n - s_{n-1}$.

Contoh 6.4

Suatu barisan dengan pola deret $s_n = 2n^3 - 3n^2$. Tentukan pola barisan tersebut kemudian tentukanlah suku ke-10!

Alternatif Penyelesaian

Dengan rumus $u_n = s_n - s_{n-1}$ maka dapat ditentukan $s_n = 2n^3 - 3n^2$ maka

$$s_{n-1} = 2(n-1)^3 - 3(n-1)^2$$

$$s_{n-1} = (2n^3 - 6n^2 + 6n - 2) - (3n^2 - 6n + 3)$$

$$s_{n-1} = 2n^3 - 9n^2 + 12n - 5$$

Jadi,

$$u_n = s_n - s_{n-1} = (2n^3 - 3n^2) - (2n^3 - 9n^2 + 12n - 5)$$

$$u_n = 6n^2 - 12n + 5$$

Pola barisan tersebut adalah $u_n = 6n^2 - 12n + 5$ sehingga:

$$u_{10} = 6(10)^2 - 12(10) + 5 = 600 - 120 + 5 = 485$$

Jadi, suku ke-10 pada barisan tersebut adalah 485.

2. Menemukan Konsep Barisan dan Deret Aritmetika

Pada sub-bab di atas, kita telah membicarakan masalah pola dari barisan dan deret bilangan secara umum. Berikutnya, kita akan belajar menemukan konsep barisan dan deret aritmetika.

a. Barisan Aritmetika

Masalah-6.2



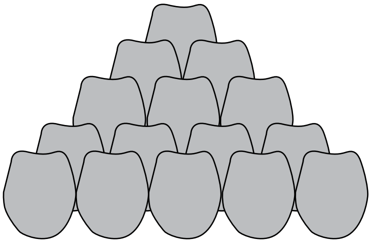
Gambar 6.4 Tumpukan Buah Jeruk

Perhatikan gambar tumpukan jeruk di samping ini! Bagaimana cara menentukan atau menduga banyak jeruk dalam satu tumpukan?

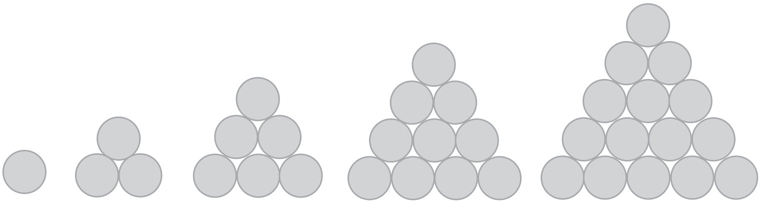
Alternatif Penyelesaian

Jika diperhatikan Gambar 6.5, maka diperoleh susunan dari beberapa jeruk. Jeruk itu dapat disusun membentuk sebuah piramida.

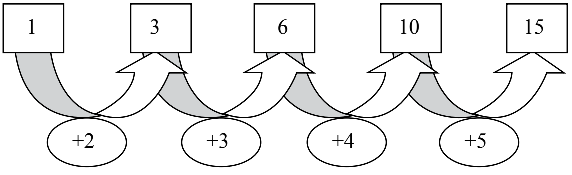
Jumlah jeruk pada bagian bawah tumpukan akan lebih banyak dibandingkan pada susunan paling atas. Misalkan susunan jeruk tersebut disederhanakan menjadi sebuah susunan segitiga, seperti Gambar 6.6.



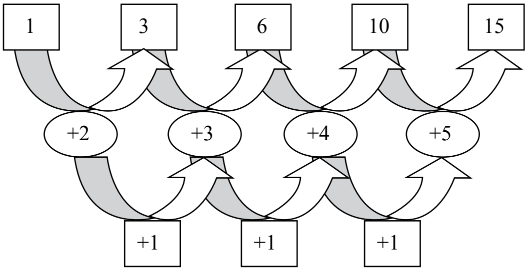
Gambar 6.5 Susunan piramida jeruk



Gambar 6.6 Susunan bulatan bentuk segitiga



Gambar 6.7. Pola susunan banyak jeruk dalam tumpukan



Gambar 6.8. Pola turunan banyak jeruk dalam tumpukan

- Mengapa harus dengan susunan segitiga, coba lakukan dengan susunan segi empat. Apa yang kamu temukan?

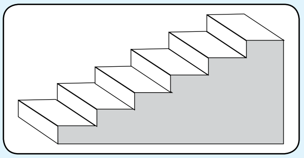
Banyaknya bulatan yang tersusun dari setiap kelompok dapat dituliskan dengan bilangan, yaitu 1, 3, 6, 10, 15. Bilangan tersebut membentuk barisan perhatikan polanya pada Gambar 6.7 berikut.

Ternyata beda antara setiap dua bilangan yang berdekatan membentuk barisan yang baru yaitu 2, 3, 4, 5,... Perhatikan skemanya pada Gambar 6.8 berikut.

Beda setiap dua bilangan yang berdekatan pada barisan 2, 3, 4, 5,... adalah tetap yaitu 1. Dengan demikian barisan 2, 3, 4, 5,... disebut "Barisan Aritmetika" dan barisan 1, 3, 6, 10, 15, ... disebut "Barisan Aritmetika Tingkat Dua".

- Coba kamu bentuk sebuah barisan aritmetika tingkat tiga?

Masalah-6.3

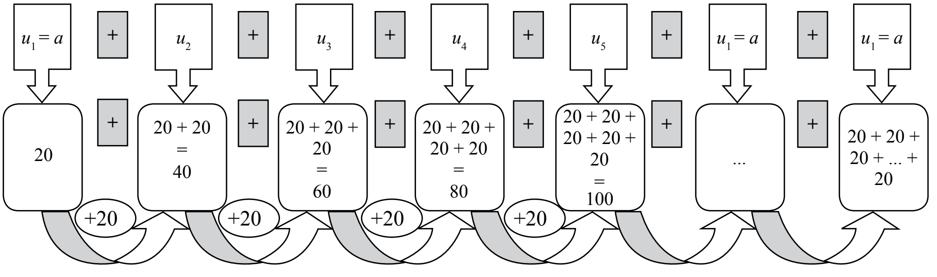


Gambar 6.9. Tangga

Perhatikan masalah berikut!
Jika tinggi satu anak tangga adalah 20 cm, berapakah tinggi tangga jika terdapat 15 buah anak tangga? Tentukanlah pola barisannya!

Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan tinggi tangga maka permasalahan di atas diurutkan menjadi:



Dari uraian di atas, ditemukan susunan bilangan 20, 40, 60, 80, …

u_n : suku ke-n

$u_1 = 20 = 1 \times 20$ $\qquad$ $u_5 = 100 = 5 \times 20$

$u_2 = 40 = 2 \times 20$ $\qquad$ …

Masalah-6.4

Lani, seorang pengerajin batik di Gunung Kidul. Ia dapat menyelesaikan 6 helai kain batik berukuran 2,4 m × 1,5 m selama 1 bulan. Permintaan kain batik terus bertambah sehingga Lani harus menyediakan 9 helai kain batik pada bulan kedua, dan 12 helai pada bulan ketiga. Dia menduga, jumlah kain batik untuk bulan berikutnya akan 3 lebih banyak dari bulan sebelumnya. Dengan pola kerja tersebut, pada bulan berapakah Lani menyelesaikan 63 helai kain batik?

$u_3 = 60 = 3 \times 20$ $\qquad$ $u_n = n \times 20 = 20n$

$u_4 = 80 = 4 \times 20$

Cermati pola bilangan $u_n = 20n$, sehingga $u_{15} = 15 \times 20 = 300$.

Berarti tinggi tangga tersebut sampai anak tangga yang ke-15 adalah 300 cm.

Alternatif Penyelesaian

Dari Masalah-6.4, dapat dituliskan jumlah kain batik sejak bulan pertama seperti di bawah ini.

Bulan I : $u_1 = a = 6$

Bulan II : $u_2 = 6 + 1.3 = 9$

Bulan III : $u_3 = 6 + 2.3 = 12$

Bulan IV : $u_4 = 6 + 3.3 = 15$

Demikian seterusnya bertambah 3 helai kain batik untuk bulan-bulan berikutnya sehingga bulan ke-n : $u_n = 6 + (n-1).3$ (n merupakan bilangan asli).

Sesuai dengan pola di atas, 63 helai kain batik selesai dikerjakan pada bulan ke-n. Untuk menentukan n, dapat dip eroleh dari,

$63 = 6 + (n - 1).3$

$63 = 3 + 3n$

$n = 20.$

Jadi, pada bulan ke-20, Lani mampu menyelesaikan 63 helai kain batik.

Jika beda antara dua bilangan berdekatan di notasikan "b", maka pola susunan bilangan 6, 9, 12, 15,…, dapat dituliskan $u_n = a + (n - 1).b$.

Definisi 6.1

Barisan aritmetika adalah barisan bilangan yang beda setiap dua suku yang berurutan adalah sama.

Beda, dinotasikan "b" memenuhi pola berikut.

$b = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = ... = u_n - u_{(n-1)}$

n adalah bilangan asli sebagai nomor suku, u_n adalah suku ke-n.

Berdasarkan definisi di atas diperoleh bentuk umum barisan aritmetika sebagai berikut.

$$u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \ldots, u_n$$

Setiap dua suku yang berurutan pada barisan aritmetika memiliki beda yang sama, maka diperoleh

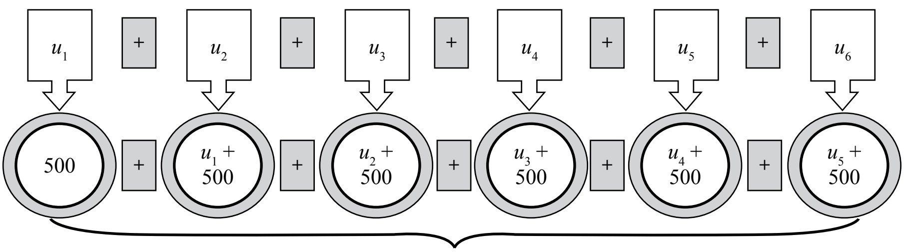
$u_1 \;=\; a$
$u_2 \;=\; u_1 + 1.b$
$u_3 \;=\; u_2 + b = u_1 + 2.b$
$u_4 \;=\; u_3 + b = u_1 + 3.b$
$u_5 \;=\; u_4 + b = u_1 + 4.b$
$\ldots$
$u_n \;=\; u_1 + (n - 1)b$

Sifat-6.1

Jika $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \ldots, u_n$ merupakan suku-suku barisan aritmetika, rumus suku ke-n barisan tersebut dinyatakan sebagai berikut.

$$u_n = a + (n - 1)b$$

$a = u_1$ adalah suku pertama barisan aritmetika, b adalah beda barisan aritmetika



Masalah-6.5

Setiap hari Siti menabungkan sisa uang jajannya. Uang yang ditabung setiap hari selama enam hari mengikuti pola barisan aritmetika dengan suku pertama a = 500 dan beda b = 500.
Bagaimana cara mengetahui banyaknya uang Siti yang ditabung pada hari ke-6?

Alternatif Penyelesaian

Penyelesaian Masalah-6.5 dapat dilakukan dengan membuat barisan aritmetika dari uang yang ditabung Siti kemudian menentukan suku terakhirnya.

Karena $u_n = a + (n-1)b$ maka $u_6 = (a + 5b)$
$= 500 + 5(500)$
$= 500 + 2500$
$= 3000$

Berarti tabungan Siti pada hari ke-6 adalah Rp 3000,00.

Contoh 6.5

1. Tentukan suku ke-n barisan di bawah ini!
   a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, … tentukan suku ke-15 !
   b) 4, 1, – 2, – 5, – 8, … tentukan suku ke-18!

Alternatif Penyelesaian

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, …
Dari barisan bilangan tersebut, diketahui bahwa
$u_1 = a = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, \ldots.$
$b = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = 1.$
Karena $u_n = a + (u - 1)b$, maka $u_{15} = a + (15 - 1)b$.
$u_{15} = 1 + (15 - 1).1 = 15$

b) 4, 1, – 2, – 5, – 8, …
Diketahui:
$u_1 = a = 4, u_2 = 1, u_3 = -2, u_4 = -5 \ldots.$
$b = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = -3.$
Karena $u_n = a + (n - 1)b$, maka $u_{18} = \text{a} + (18 - 1)b$.
$u_{18} = 4 + (18 - 1). (-3) = -47$

2. Suku ke-4 barisan aritmetika adalah 19 dan suku ke-7 adalah 31. Tentukan suku ke-50.

Alternatif Penyelesaian

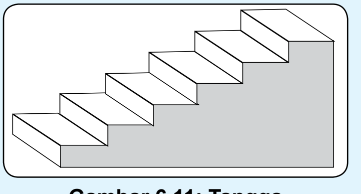
$$
\begin{aligned}
u_n &= a + (n-1)b \\
u_4 &= 19 = a + 3b \\
u_7 &= 31 = a + 6b \quad - \\
\hline
-3b &= -12 \\
b &= 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a + 3b &= 19 \\
a + 3(4) &= 19 \\
a &= 7
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
u_{50} &= a + 49b \\
&= 7 + 49\,(4) \\
&= 203
\end{aligned}
$$

b. Deret Aritmetika

Masalah-6.6

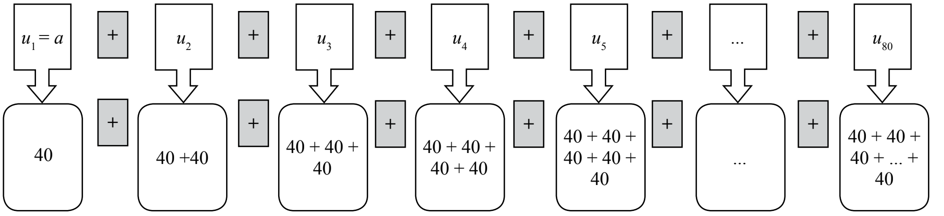
Perhatikan kembali gambar di samping! Jika membuat sebuah anak tangga dibutuhkan 40 batu bata, berapa banyak batu bata yang dibutuhkan untuk membuat 80 anak tangga?



Gambar 6.11: Tangga

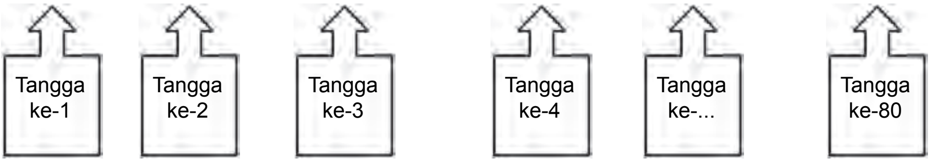
Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan banyaknya batu bata yang dibutuhkan dalam membuat anak tangga pertama sampai anak tangga yang ke 80 dapat diilustrasikan seperti gambar berikut.



Berdasarkan gambar di atas dapat disimpulkan bahwa banyak batu bata yang dibutuhkan untuk membuat 80 anak tangga:

40 + (40 + 40) + (40 + 40 + 40) + (40 + 40 + 40 + 40) + ... + (40 + 40 + 40 + 40 + 40 + ...)



Susunan banyak batu bata membentuk barisan aritmetika:
40, 80, 120, 160, 200, 240, 280, 320, 360, 400,….
Cukup jelas, bahwa, u_1 = 40 dan b = 40, maka u_{80} = 3200.
Karena pertanyaan dalam masalah ini adalah banyak batu bata yang diperlukan untuk membuat 80 anak tangga, bukan banyak batu bata yang diperlukan membuat anak tangga ke-80 maka banyak batu bata harus dijumlahkan.

$$\underbrace{40+80+120+160+200+240+280+320+400+...+3160+3200}_{\text{sebanyak 80 suku}}$$

Misalkan s_n adalah jumlah n suku pertama pada barisan. Perhatikan pola berikut:

- $s_2 = 40 + 80 = \dfrac{(40+80)\times 2}{2} = 120$
- $s_4 = 40 + 80 + 120 + 160 = \dfrac{(40+160)\times 4}{2} = 400$
- $s_6 = 40 + 80 + 120 + 160 + 200 + 240 = \dfrac{(40+240)\times 6}{2} = 840$
- $s_8 = 40 + 80 + 120 + 160 + 200 + 240 + 280 + 320 = \dfrac{(40+320)\times 8}{2} = 1440.$

Jadi, untuk menghitung jumlah 80 suku pertama, dilakukan dengan pola di atas,

$s_{80} = 40 + 80 + 120 + 160 + 200 + 240 + 280 + 320 + 360 + 400 + \ldots + 3160 + 3200$

$= \dfrac{(40+3200)\times 80}{2} = 129.000.$

Jadi, banyak batu bata yang diperlukan untuk membuat 80 anak tangga adalah 129.000 batu bata.

- Untuk penjumlahan bilangan di atas, bagaimana cara yang kamu gunakan jika banyak bilangan yang akan dijumlahkan adalah ganjil?

Susunan jumlah suku-suku barisan aritmetika, dinyatakan sebagai berikut.

$s_1 = u_1$
$s_2 = u_1 + u_2$
$s_3 = u_1 + u_2 + u_3$
$s_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$
...
$s_{(n-1)} = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots + u_{(n-1)}$
$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots + u_{(n-1)} + u_n$
n merupakan bilangan asli.

Definisi 6.2

Deret aritmetika adalah barisan jumlah n suku pertama barisan aritmetika, $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{(n-1)}, s_n$ dengan $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{(n-1)} + u_n$

Untuk menentukan jumlah n suku pertama, ditentukan rumus berikut:

$s_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots + (a + (n - 1)b)$ .... (1)

Persamaan 1) diubah menjadi

$s_n = (a + (n - 1)b) + \ldots + (a + 2b) + (a + b) + a$ .... (2)

Dengan menjumlahkan persamaan (1) dan (2), diperoleh:

$2s_n = 2a + (n - 1)b + 2a + (n - 1)b + 2a + (n - 1)b + \ldots + 2a + (n - 1)b$
$2s_n = n(2a + (n - 1)b)$
$s_n = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)b)$

Sifat-6.2

$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots + u_{n-1} + u_n$ merupakan jumlah n suku pertama barisan aritmetika,

$$s_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b) = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

Contoh 6.6

Carilah jumlah bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 9!

Alternatif Penyelesaian

Bilangan bulat yang habis dibagi 9 diantara 1 dan 100 adalah

$$9, 18, 27, \ldots, 99$$

Bilangan-bilangan tersebut membentuk barisan aritmetika dengan $a = 9$, $b = 9$, dan $u_n = 99$. Selanjutnya akan ditentukan nilai n sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u_n = 99 \quad &\Leftrightarrow \quad a + (n-1)b = 99 \\ &\Leftrightarrow \quad 9 + (n-1)9 = 99 \\ &\Leftrightarrow \quad 9 + 9n - 9 = 99 \\ &\Leftrightarrow \quad 9n = 99 \\ &\Leftrightarrow \quad n = 10 \end{aligned}$$

Jadi, banyak bilangan yang habis dibagi 9 diantara 1 dan 100 adalah 10. Dengan menggunakan rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika diperoleh:

$$s_n = \frac{1}{2}n\left(a + u_n\right) \quad \text{atau} \quad s_{10} = \frac{1}{2}(10)(9+99) = 540$$

Dengan demikian, $9 + 18 + 27 + 36 + 45 + \ldots + 99 = 540$.

Contoh 6.7

Diketahui $a + (a + 1) + (a + 2) + ... + 50 = 1139$. Jika a bilangan bulat positif, maka nilai $a = ...$

Alternatif Penyelesaian

Suku ke-n barisan bilangan di atas adalah 50, sehingga

$$\begin{aligned} u_n = a + (n-1)b \quad &\Leftrightarrow \quad 50 = a + (n-1)1 \\ &\Leftrightarrow \quad a = 51 - n. \end{aligned}$$

Jumlah n suku pertama adalah 1.139 sehingga

$$\begin{aligned} s_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b) \quad &\Leftrightarrow \quad 1139 = \frac{n}{2}(2a + (n-1)1), \text{ atau} \\ &\Leftrightarrow \quad 2278 = n\left((2a + (n-1)\right). \end{aligned}$$

Dengan mensubtitusikan $a = 51 - n$, diperoleh $n^2 - 101n + 2278 = 0$.

- Ingat kembali cara menentukan akar-akar persamaan kuadrat yang telah kamu pelajari di SMP.

$n^2 – 101n + 2278 = 0 \Leftrightarrow (n – 67).(n – 34) = 0.$
diperoleh, $n = 67$ atau $n = 34$.
Jika nilai a bilangan bulat positif maka nilai yang memenuhi adalah $n = 34$ dengan nilai $a = 17$.

Contoh 6.8

Diketahui deret aritmetika tingkat satu dengan s_n adalah jumlah n suku pertama. Jika $s_n = (m^3 – 1)\ n^2 – (m^2 + 2)\ n + m – 3$, maka tentukanlah suku ke-10 pada barisan tersebut!

Alternatif Penyelesaian

Dengan mengingat kembali rumus deret aritmetika tingkat satu:

$$s_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b) = \frac{b}{2}n^2 + (a-b)n$$

maka

$s_n = (m^3 – 1)\ n^2 – (m^2 + 2)\ n + m – 3$ akan menjadi deret aritmetika tingkat satu jika $m – 3 = 0$ atau $m = 3$ sehingga $s_n = (3^3 – 1)\ n^2 – (3^2 + 2)\ n + (3 – 3) = 26n^2 – 11n$.

Jadi, $u_{10} = s_{10} - s_9 = \left(26(10^2) - 11(10)\right) - \left(26(9^2) - 11(9)\right) = 2490 - 2007 = 483.$

Uji Kompetensi 6.1

1. Tentukan banyak suku dan jumlah barisan aritmetika berikut!
   a. 4 + 9 + 14 + 19 + ... + 104
   b. 72 + 66 + 60 + 54 + ... + 12
   c. –12 – 8 – 4 – 0 + ... + 128
   d. –3 – 7 – 11 – 15 ... – 107

2. Tentukan banyak suku dari barisan berikut!
   a. 6 + 9 + 12 + 15 + ... = 756
   b. 56 + 51 + 46 + 41 + ... = – 36
   c. 10 + 14 + 18 + 22 + ... = 640

3. Tentukan jumlah deret aritmetika berikut!
   a. 3 + 9 + 18 + 30 + ... sampai dengan 18 suku.
   b. 2 + 10 + 24 + 54 + ... sampai dengan 10 suku.
   c. 1 + 7 + 18 + 34 + ... sampai dengan 14 suku.
   d. 50 + 96 + 138 + 176 + ... sampai dengan 10 suku.
   e. –22 – 38 – 48 – 52 – ... sampai dengan 20 suku.

4. Diketahui barisan aritmetika dengan suku ke-7 dan suku ke-10 berturut-turut adalah 25 dan 37. Tentukanlah jumlah 20 suku pertama!

5. Bila a, b, c merupakan suku berurutan yang membentuk barisan aritmetika, buktikan bahwa ketiga suku berurutan berikut ini juga membentuk barisan aritmetika $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$.

6. Tentukan banyak bilangan asli yang kurang dari 999 yang tidak habis dibagi 3 atau 5.

7. Diketahui barisan yang dibentuk oleh semua bilangan asli 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 …
   Angka berapakah yang terletak pada bilangan ke 2004 ? (bilangan ke-12 adalah angka 1 dan bilangan ke-15 adalah angka 2).

8. Pola $A\ B\ B\ C\ C\ C\ D\ D\ D\ D\ A\ B\ B\ C\ C\ C\ D\ D\ D\ D\ A\ B\ B\ C\ C\ C\ D\ D\ D\ D$ ... berulang sampai tak hingga. Huruf apakah yang menempati urutan $2^6 3^4$?

9. Diketahui barisan yang dibentuk oleh semua bilangan asli 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 … Angka berapakah yang terletak pada bilangan ke 2013? (bilangan ke-11 adalah angka 1 dan bilangan ke-12 adalah angka 6).

10. Suatu perusahaan minuman kaleng pada bulan Januari 2012 memproduksi 40.000 minuman kaleng. Setiap bulan perusahaan tersebut menaikkan produksinya secara tetap sebanyak 250 kaleng. Berapa banyak minuman kaleng yang diproduksi perusahaan sampai akhir bulan Juni 2013?

Projek

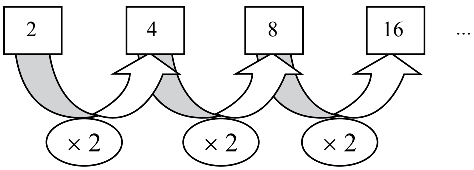
Himpunlah minimal tiga masalah penerapan barisan dan deret aritmatika dalam bidang fisika, teknologi informasi, dan masalah nyata di sekitarmu. Ujilah berbagai konsep dan aturan barisan dan deret aritmatika di dalam pemecahan masalah tersebut. Buatlah laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas!

3. Menemukan Konsep Barisan dan Deret Geometri

a. Barisan Geometri

Contoh 6.9

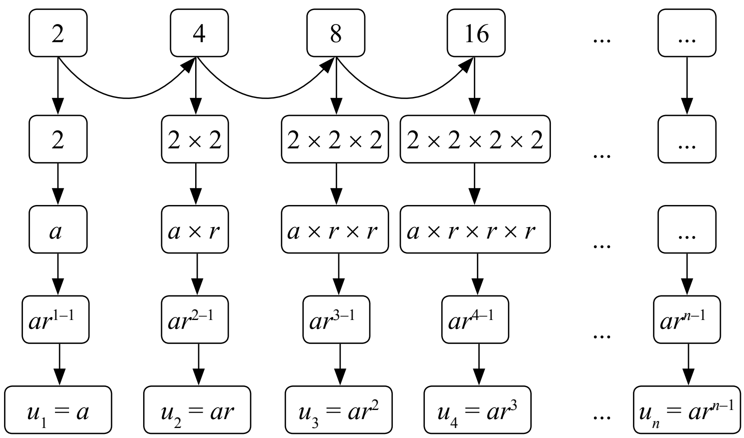
Perhatikan barisan bilangan 2, 4, 8, 16, …



Nilai perbandingan $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{u_3}{u_2} = \ldots = \dfrac{u_n}{u_{n-1}} = 2 \quad \dfrac{4}{2} = \dfrac{8}{4} = \dfrac{16}{8} = 2$

Jika nilai perbandingan dua suku berurutan dimisalkan r dan nilai suku pertama adalah a, maka susunan bilangan tersebut dapat dinyatakan dengan 2, 2 × 2, …

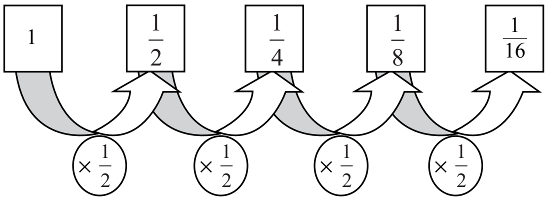
Perhatikan gambar berikut ini.



Dari pola di atas dapat disimpulkan bahwa $u_n = ar^{n-1}$

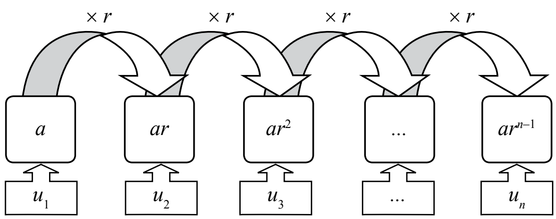
Contoh 6.10

Perhatikan susunan bilangan 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ...



Nilai perbandingan $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \ldots = \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{1}{2}$. Jika nilai perbandingan dua suku berurutan dimisalkan r dan nilai suku pertama adalah a, maka susunan bilangan tersebut dapat dinyatakan dengan 1, $1\left(\frac{1}{2}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)$, …

Perhatikan gambar berikut!



Sehingga:

- $u_1 = a = 1$
- $u_2 = u_1.\frac{1}{2} = 1.\frac{1}{2}$ $\quad \Leftrightarrow u_2 = u_1.r = a.r$
- $u_3 = u_2.\frac{1}{2} = 1.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\quad \Leftrightarrow u_3 = u_2.r = a.r.r = a.r^2$
- $u_4 = u_3.\frac{1}{2} = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^2.\frac{1}{2} = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^3$ $\quad \Leftrightarrow u_4 = u_3.r = a.r^2.r = a.r^3$
- $u_5 = u_4.\frac{1}{2} = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^3.\frac{1}{2} = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^3$ $\quad \Leftrightarrow u_5 = u_4.r = a.r^3.r = a.r^4$

Dari pola di atas, tentunya dengan mudah kamu pahami bahwa,

$$u_n = u_{n-1}.r = a.r^{n-2}\ r = a.r^{n-1}$$

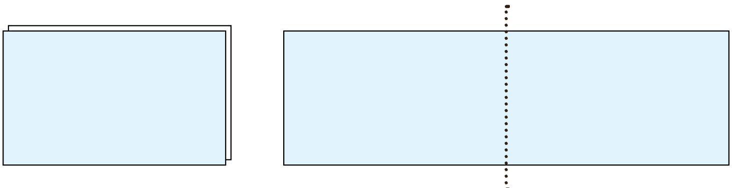
Contoh 6.11

Seorang anak memiliki selembar kertas. Berikut ini disajikan satu bagian kertas.



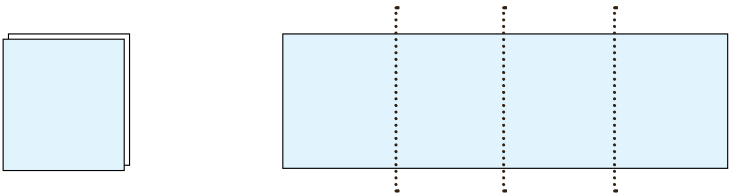
Gambar 6.12 Selembar Kertas

Ia melipat kertas tersebut menjadi dua bagian yang sama besar.



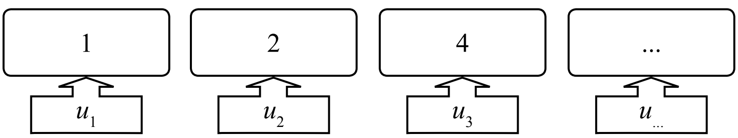
Gambar 6.13 Selembar Kertas pada Lipatan Pertama

Kertas yang sedang terlipat ini, kemudian dilipat dua kembali olehnya.



Gambar 6.14 Selembar Kertas pada Lipatan Kedua

Ia terus melipat dua kertas yang sedang terlipat sebelumnya. Setelah melipat, ia membuka hasil lipatan dan ditemukan kertas tersebut terbagi menjadi 2 bagian. Perhatikan bagian kertas tersebut membentuk sebuah barisan bilangan yang disajikan sebagai berikut.



Setiap dua suku berurutan dari barisan bilangan tersebut memiliki perbandingan yang sama, yaitu $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \ldots = \frac{u_n}{u_{n-1}} = 2.$ Barisan bilangan ini disebut barisan geometri.

Definisi 6.3

Barisan geometri adalah barisan bilangan yang nilai pembanding (rasio) antara dua suku yang berurutan selalu tetap.
Rasio, dinotasikan r merupakan nilai perbandingan dua suku berurutan. Nilai r dinyatakan: $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \ldots \frac{u_n}{u_{n-1}}$.

Sifat-6.3

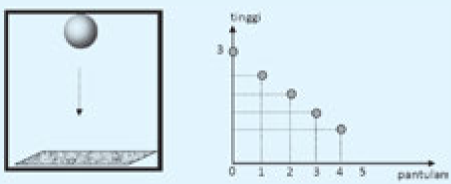
Jika $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ merupakan susunan suku-suku barisan geometri, dengan $u_1 = a$ dan r adalah *rasio*, maka suku ke-n dinyatakan
$u_n = ar^{n-1}$, n adalah bilangan asli.

b. Deret Geometri

Analog dengan konsep deret aritmetika, deret geometri juga merupakan barisan suku pertama barisan geometri. Cermati masalah di bawah ini!

Masalah-6.8

Sebuah bola jatuh dari gedung setinggi 3 meter ke lantai dan memantul kembali setinggi $\frac{4}{5}$ kali dari tinggi sebelumnya Tentukanlah panjang lintasan bola tersebut sampai pada pantulan ke-10!



Gambar 6.15 Pantulan Bola

Alternatif Penyelesaian

Pandang dan amatilah kembali gambar di atas! Tampak pada Gambar 6.15 bahwa terdapat 2 kali lintasan bola yang sama tingginya setelah pantulan pertama. Misalkan

Tabel 6.6 Tinggi Pantulan Bola

Pantulan ke ...	0	1	2	3	...
Tinggi pantulan (m)	3	$\frac{12}{5}$	$\frac{48}{25}$	$\frac{192}{125}$	...
Suku ke ...	u_1	u_2	u_3	u_4	...

a ketinggian awal bola dan misalkan t tinggi pantulan maka tinggi pantulan bola dapat diberikan pada tabel berikut.

- Coba kamu teruskan mengisi tabel pada pantulan berikutnya.
- Apakah mungkin terjadi ketinggian pantulan bola sama dengan nol?

Misalkan panjang lintasan bola sampai pantulan ke-10 adalah S.

$S = u_1 + 2\ (u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_{10})$

$\Leftrightarrow S = 2\ (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_{10}) - u_1$

$\Leftrightarrow S = 2s_{10} - u_1$

dimana

Tabel 6.7 Deret Pantulan Bola

Deret	Jumlah suku-suku	Nilai
s_1	u_1	3
s_2	$u_1 + u_2$	$3+\frac{12}{5}=3(\frac{9}{5})=3(\frac{25-16}{5})$
s_3	$u_1 + u_2 + u_3$	$3+\frac{12}{5}+\frac{48}{25}=3(\frac{61}{25})=3(\frac{125-64}{25})$
s_4	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4$	$3+\frac{12}{5}+\frac{48}{25}+\frac{192}{125}=3(\frac{369}{125})=3(\frac{625-256}{125})$
...	...	...
s_n	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 ... + u_n$	$s_n=3(\frac{5^n-4^n}{5^{n-1}})$

Berdasarkan Tabel 6.7 deret bilangan tersebut adalah sebuah barisan jumlah, $s_1, s_2, s_3, ..., s_n, ...$ yaitu $3(\frac{5^1-4^1}{5^0}), 3(\frac{5^2-4^2}{5^1}), 3(\frac{5^3-4^3}{5^2}), ..., 3(\frac{5^n-4^n}{5^{n-1}})$.

Sehingga $s_{10}=3(\frac{5^{10}-4^{10}}{5^9})$

Jadi, panjang lintasan bola sampai pantulan ke-10 adalah $S = 2s_{10} - u_1$ atau $S=6(\frac{5^{10}-4^{10}}{5^9})-3$

- Coba kamu diskusikan bersama temanmu untuk mencari panjang lintasan bola pantul jika dilemparkan ke atas setinggi 5 meter dan memantul setinggi 4/5 kali dari tinggi sebelumnya.

Masalah-6.9

Setiap akhir bulan Siti menabung di sebuah bank sebesar Rp 5.000.000,00 dan memperoleh jasa simpanan sebesar 1 % setiap bulan. Jika bank tidak membebankan biaya administrasi. Tentukan simpanan Siti setelah 2 tahun!

Alternatif Penyelesaian

Misalkan modal Siti yang disimpan setiap akhir bulan adalah M dengan bunga i %, maka diperoleh

Setelah Bulan ke-	Modal
1	$M + Mi = M(1 + i)$
2	$M(1 + i) + M(1 + i)\,i$ $= M(1 + i)(1 + i)$ $= M(1 + i)^2$
3	$M(1 + i)^2 + M(1 + i)^2 \cdot i$ $= M(1 + i)^2\,(1 + i)$ $= M(1 + i)^3$
...	...
n	$M(1 + \text{i})^n$

Berdasarkan tabel di atas maka diperoleh simpanan Siti Bulan ke- 24 adalah :

Simpanan Siti $= M(1 + \text{i})^n$

$= 5.000.000\,(1 + 0{,}01)^{24}$

$= 5.000.000\,(0{,}01)^{24}$

$= 6.348.673{,}24$

Simpanan Siti setelah Bulan ke- 24 adalah Rp 6.348.673,24

Definisi 6.4

Deret geometri adalah barisan jumlah n suku pertama barisan geometri, $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ dengan

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

atau

$$s_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$$

dengan $u_1 = a$ dan r adalah rasio.

Sifat-6.4

Jika suatu deret geometri suku pertama adalah $u_1 = a$, dan rasio $= r$, maka jumlah n suku pertama adalah

i. $s_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$, untuk $r < 1$.

ii. $s_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$, untuk $r > 1$.

iii. $s_n = na$, untuk $r = 1$.

Bukti:

i. $s_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$ ....(1)

Dengan mengalihkan kedua ruas persamaan 1) dengan r, didapatkan persamaan berikut.

$rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n$ ....(2)

Sekarang, selisih persamaan (1) dengan (2), diperoleh

$s_n - rs_n = (a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n)$

$s_n(1 - r) = a - ar^n$

$$s_n = \frac{a - ar^n}{1-r}$$

Rumus jumlah n suku pertama deret geometri adalah

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r},\ r < 1.$$

ii. Dengan cara yang sama pada sifat i, buktikan sifat ii, kemudian buktikan juga sifat iii.

Contoh 6.11

Tentukan jumlah 10 suku pertama dari deret geometri berikut ini!

$$4+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots$$

Alternatif Penyelesaian

Pertama harus ditentukan rasio deret bilangan tersebut.

$$r=\frac{u_2}{u_1}=\frac{u_3}{u_2}=\frac{u_4}{u_3}=\frac{1}{4}.$$

Karena $r < 1$, maka jumlah 10 suku pertama ditentukan melalui rumus,

$$s_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Akibatnya, $s_{10}=\dfrac{4\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right)}{1\frac{1}{4}}=\dfrac{4\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right)}{\frac{3}{4}}=\dfrac{16}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right).$

Pertanyaan Kritis

Perhatikan pola barisan bilangan berikut!

a) 1, 3, 7, 9, …
b) 1, 4, 9, 16, …
c) 3, 1, 4, 2, 5, …

Apakah barisan tersebut termasuk barisan aritmetika atau barisan geometri? Tentukanlah suku ke 10 dari pola barisan di atas!

Uji Kompetensi 6.2

1. Untuk memeriksa sebuah barisan merupakan barisan geometri apakah cukup hanya dengan menentukan rasio dua suku berturutan? Jelaskan dengan menggunakan contoh!

2. Tentukan rumus suku ke-n dan suku ke-10 dari barisan bilangan di bawah ini!

   a) 1, 4, 16, 24, …

   b) 5, 10, 20, 40, …

   c) 9, 27, 81, 243, …

   d) $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{5}$, 1, 5, …

   e) 81, 27, 9, 3, …

3. Tentukan rasio dan suku pertama dari barisan geometri di bawah ini!

   a) Suku ke-4 = 8 dan suku ke-6 = 729

   b) Suku ke-2 = 6 dan suku ke-5 = 162

   c) $U_3 = 10$ dan $U_6 = 1{,}25$

4. Selesaikan barisan geometri di bawah ini!

   a) Suku ke- 4 = 27 dan suku ke-6 = 243 tentukan suku ke-8

   b) $U_2 = 10$ dan $U_6 = 10$, tentukan U_9

   c) $U_2 = \sqrt[2]{2}$ dan $U_5 = 8$, tentukan U_{10}

5. Tentukan hasil jumlah barisan bilangan di bawah ini!

   a) 1, 2, 4, 8, 16, … (sampai 10 suku)

   b) 54, 18, 6, 2, … (sampai 9 suku)

   c) 5, (–15), 45, (–135), … (sampai 8 suku)

   d) 1, 1, 3, 2, 9, 4, 27, 8, … (sampai 19 suku)

   e) 8, 7, 9, 3, …, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$ = …

6. Tentukan nilai x dari penjumlahan suku-suku barisan geometri $2 + 4 + 8 + \ldots + 2^x = 2046$

7. Tiga bilangan membentuk barisan aritmetika. Jika suku ketiga ditambah 3 dan suku kedua dikurangi 1, diperoleh barisan geometri. Jika suku ketiga barisan aritmetika ditambah 8, maka hasilnya menjadi 5 kali suku pertama. Tentukan beda dari barisan aritmetika tersebut!

8. Tiga bilangan positif membentuk barisan geometri dengan rasio $r > 1$. Jika suku tengah ditambah 4, maka terbentuk sebuah barisan aritmetika yang jumlahnya 30. Tentukan Hasil kali dari ketiga bilangan tersebut!

9. Sebuah bola jatuh dari ketinggian 8m dan memantul kembali dengan ketinggian $\frac{3}{5}$ kali tinggi sebelumnya

Pemantulan ini berlangsung terus menerus hingga bola berhenti. Berapakah jarak lintasan seluruhnya?

10. Pertumbuhan penduduk biasanya dinyatakan dalam persen. Misalnya, pertumbuhan penduduk adalah 2% per tahun artinya jumlah penduduk bertambah sebesar 2% dari jumlah penduduk tahun sebelumnya. Pertambahan penduduk menjadi dua kali setiap 10 tahun. Jumlah penduduk desa pada awalnya 500 orang, berapakah jumlah penduduknya setelah 70 tahun apabila pertumbuhannya 2.5%?

11. Pertumbuhan ekonomi biasanya dalam persen. Misalnya, pertum–buhan ekonomi suatu negara sebesar 5% per tahun artinya terjadi pertambahan Produk Domestik Bruto (PDB) sebesar 5% dari PDB tahun sebelumnya. Berdasarkan analisis, ekonomi Indonesia akan mengalami pertumbuhan sebesar 6.5% per tahun selama tiga tahun ke depan. Tentukan PDB pada tahun ketiga apabila PDB tahun ini PDB-nya sebesar 125 triliun rupiah.

12. Jika barisan x_1, x_2 , x_3,… memenuhi $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = n^3$, untuk semua n bilangan asli, maka x_{100} = ...

13. Kenaikan harga barang-barang disebut inflasi. Berdasarkan analisis, ekonomi Indonesia akan mengalami inflasi sebesar 8% per tahun selama 5 tahun mendatang. Apabila harga emas sekarang ini adalah Rp200.000,00 per gram, tentukan harga emas tersebut empat tahun lagi.

Projek

Himpunlah minimal tiga buah masalah penerapan barisan dan deret geometri dalam bidang fisika, teknologi informasi dan masalah nyata di sekitarmu. Ujilah berbagai konsep dan aturan barisan dan deret geometri di dalam pemecahan masalah tersebut. Buatlah laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Beberapa hal penting sebagai kesimpulan dari hasil pembahasan materi barisan dan deret, disajikan sebagai berikut.

1. Barisan bilangan adalah sebuah fungsi dengan domainnya himpunan bilangan asli dan daerah hasilnya suatu himpunan bagian dari himpunan bilangan real.
2. Barisan aritmetika adalah barisan bilangan yang memiliki beda dua suku berurutan selalu tetap.
3. Deret aritmetika adalah jumlah suku-suku barisan aritmetika.
4. Barisan geometri adalah barisan bilangan yang memiliki hasil bagi dua suku berurutan adalah tetap. Hasil bagi dua suku berurutan disebut rasio.
5. Deret geometri adalah jumlah suku-suku barisan geometri.
6. Masih banyak jenis barisan yang akan kamu pelajari pada jenjang yang lebih tinggi, seperti barisan naik dan turun, barisan harmonik, barisan fibbonaci, dan lain sebagainya. Kamu dapat menggunakan sumber bacaan lain untuk lebih mendalami sifat-sifat barisan dan deret.

Selanjutnya kita akan membahas materi persamaan dan fungsi kuadrat. Tentu kamu wajib mengulangi mempelajari materi persamaan linear, relasi, dan fungsi, sebab materi tersebut adalah prasyarat utama mempelajari persamaan dan fungsi kuadrat.

Daftar Pustaka

Anton. Howard, Rorres. Chris. (2005). *Elementary Linear Algebra with Applications*. John Wiley & Sons, Inc

Ball, Deborah Loewenberg. (2003). *Mathematical Proficiency for All Students (Toward a Strategic Research and Development Program in Mathematics Education)*. United States of America: RAND.

Checkley , Kathy (2006). *The Essentials of Mathematics, Grades 7 -12. United States of America: The Association for Supervision and Curriculum Development (ASCD).*

Chung, Kai Lai. (2001). *A Course in Probability Theory,* USA: Academic Press.

Committee on science and mathematics teacher preparation, center for education national research council (2001). *Educating Teachers of science, mathematics, and technology (new practice for new millennium.* United States of America: the national academy of sciences.

Douglas. M, Gauntlett. J, Gross. M. (2004). *Strings and Geometry*. United States of America: Clay Mathematics Institute.

Hefferon, Jim (2006). *Linear Algebra.* United States of America: Saint Michael's College Colchester.

Howard, dkk. (2008). *California Mathematics. Consepts, Skills, and Problem Solving 7.* Columbus-USA, The McGraw-Hill Companies, Inc.

Johnstone. P.T. (2002). *Notes on Logic and Set Theory*. New York: University of Cambridge.

Magurn A, Bruce. (2002). *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*. United Kingdom: United Kingdom at the University Press, Cambridge.

Sinaga, Bornok. (2007). *Pengembangan Model Pembelajaran Matematika Berdasarkan Masalah Berbasis Budaya Batak. Surabaya: Program Pascasarjana UNESA.*

Slavin, Robert, E. (1994). *Educational psychology, theories and practice.* Fourth Edition. Masschusetts: Allyn and Bacon Publishers.

Soedjadi, R. (2001). *Pemanfaatan realitas dan lingkungan dalam pembelajaran matematika. Makalah, disajikan pada seminar 'RME'. UNESA:FMIPA UNESA Surabaya.*

Tan, Oon Seng. (1995). *Mathematics. A Problem Solving Approach*. Singapore: Federal Publication (S) Pte Lsd.

Urban. P, Owen. J, Martin. D, Haese. R, Haese. S. Bruce. M. (2005). *Mathematics For Yhe International Student (International Baccalaureate Mathematics HL Course)*. Australia: Haese & Harris Publication.

Van de Walle, John A. (1990). *Elementary school mathematics: teaching developmentally*. New York: Longman.

Van de Walle. Jhon, dkk. (2010). *Elementary and Middle School Mathematics (teaching developmentally)*. United States of America: Allyn & Bacon.